

Permutazioni

■ Permutazioni semplici

Le **permutazioni** sono disposizioni di n oggetti a n a n , quindi **differiscono** l'una dall'altra **solo per l'ordine** degli oggetti.

Per calcolare il numero di permutazioni semplici di n oggetti si utilizza la seguente formula:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Per stabilire in quanti modi diversi possono sedersi quattro persone su una panca avente quattro posti basta stabilire quanti sono i gruppi distinti di quattro elementi che si possono ottenere con quattro elementi diversi, in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per l'ordine degli oggetti che lo compongono. Si tratta quindi delle permutazioni semplici di 4 oggetti (le quattro persone):

$$P_4 = D_{4,4} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$



■ Permutazioni con ripetizione

Le **permutazioni con ripetizione** sono disposizioni di n oggetti a n a n , di cui k uguali tra loro.

Per calcolare il numero di permutazioni di n oggetti di cui k uguali si utilizza la seguente formula:

$$P_{n,k}^{rip} = \frac{n!}{k!}$$

Per stabilire quanti anagrammi si ottengono con le lettere della parola CANNONE, ovvero quante parole di sette lettere (anche senza senso) si possono formare con sette lettere, tre delle quali uguali, basta stabilire quanti sono i gruppi di sette lettere che si possono formare con sette lettere, tre delle quali uguali, in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per l'ordine degli oggetti che lo compongono. Si tratta quindi delle permutazioni con ripetizione di 7 oggetti (le sette lettere considerate), 3 dei quali uguali:

$$P_{7,3}^{rip} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$



Combinazioni

■ Combinazioni semplici

Con **combinazioni** di n oggetti a k a k ($C_{n,k}$), si definisce il numero di modi in cui è possibile disporre n oggetti presi k alla volta (n a k) ove ciascuna combinazione differisce dalle altre **solo per gli oggetti** e non per il loro ordine.

I gruppi $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 1\}$ rappresentano due disposizioni, ma una sola combinazione, mentre i gruppi $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 3, 6\}$ rappresentano due disposizioni e due combinazioni.

Quattro persone che si siedono nei quattro posti a disposizione intorno a un tavolo costituiscono, comunque si dispongano, sempre **una sola** combinazione.



Per calcolare il numero di combinazioni semplici di n oggetti presi k alla volta si utilizza la formula:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Per stabilire quante strette di mano avvengono in un gruppo di sei persone se ogni persona stringe la mano a tutte le altre basta stabilire quanti sono i gruppi di due elementi che si possono formare con sei elementi dati, in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per gli oggetti che lo compongono. Si tratta quindi delle combinazioni semplici di 6 oggetti presi a 2 a 2:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2} = 3 \cdot 5 = 15$$



26 È utile ricordare le seguenti definizioni:

- moda di una distribuzione statistica: dato che ricorre più frequentemente all'interno della distribuzione (affermazione **A** errata);
- mediana di una serie di dati posti in ordine crescente: valore che occupa la posizione centrale della successione se i dati sono in numero dispari; semisomma dei due valori centrali se i dati sono in numero pari (affermazione **B** errata);
- probabilità di un evento: rapporto tra il numero dei casi favorevoli al manifestarsi dell'evento e il numero dei casi possibili, giudicati ugualmente probabili (affermazione **C** errata);
- probabilità del complementare di un evento E : detto \bar{E} il complementare (o opposto, o contrario) dell'evento E , sussiste la relazione:

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1 \rightarrow P(\bar{E}) = 1 - P(E) \text{ (affermazione **D** errata)}$$

- eventi indipendenti: due eventi compatibili si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno non influisce sulla probabilità del verificarsi dell'altro (affermazione **E** esatta).

La risposta corretta è quindi la **E**.

► Unità 1, Lezione 8 e Lezione 9

27 Si tratta di un problema di calcolo combinatorio. Il numero di strette di mano che si scambiano le 13 persone corrisponde al numero di gruppi di 2 persone che si possono formare con i 13 oggetti (le persone appunto) dove l'ordine non conta (se si conta la stretta di mano fa Tizio e Caio, non si deve contare quella fra Caio e Tizio in quanto si tratta della stessa stretta di mano): si tratta quindi di combinazioni semplici. Nella formula generale:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

si pone $n = 13$ e $k = 2$ e si ottiene:

$$C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78$$

La risposta corretta è quindi la **C**.

► Unità 1, Lezione 10

28 Poiché due bandiere tricolori a righe verticali si distinguono per i colori utilizzati o per il loro ordine, per stabilire quante se ne possono ottenere utilizzando 7 colori dobbiamo determinare quante sono le possibili disposizioni semplici di 7 elementi presi a 3 a 3. Essendo:

$$D_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

la risposta corretta è la **C**.

► Unità 1, Lezione 10

29 La risposta corretta è la **D**. Prima di procedere al calcolo numerico è necessario eseguire due equivalenze; supponendo di eseguire il calcolo in grammi:

$$20 \text{ cg} = 0,2 \text{ g}; \quad 5 \text{ kg} = 5000 \text{ g} \quad \rightarrow \quad M = 10 \text{ g} + 0,2 \text{ g} + 5000 \text{ g} = 5010,2 \text{ g}$$

Più in generale, prima di scegliere la risposta tra le alternative di un quesito, è bene soffermarsi sulle unità di misura oltre che sul risultato numerico!

► Unità 1, Lezione 11

30 Il prefisso *micro* corrisponde a 10^{-6} . Essendo:

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1.000.000}$$

la risposta corretta è la **D**.

► Unità 1, Lezione 11

Vuoi metterti alla prova con 5 domande difficili sugli argomenti di questa Unità?
Inquadra il QR code a fianco.

Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



3 La tavola periodica degli elementi

UNITÀ 1

Il linguaggio della chimica

Ogni elemento chimico è individuato tramite un nome e un simbolo costituito da una o due lettere (generalmente ricavate dal nome inglese o latino), di cui la prima sempre maiuscola e la seconda sempre minuscola.

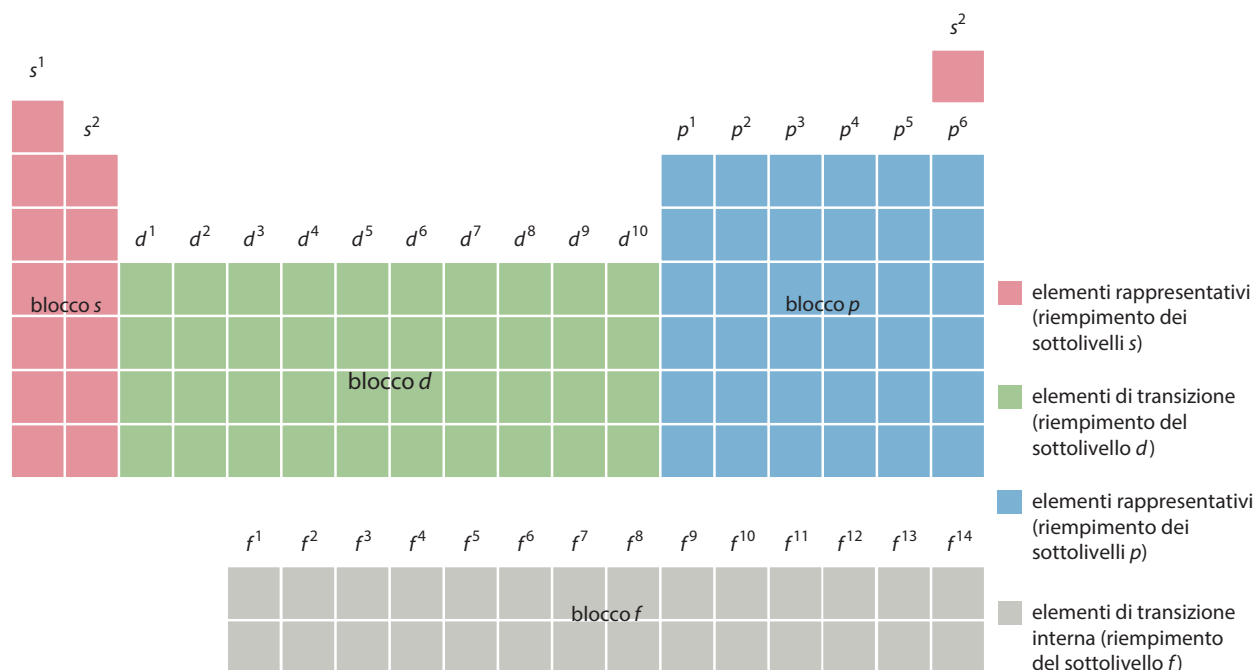
Principio di costruzione della tavola periodica

Nella tavola periodica (riportata al termine della parte di chimica) gli elementi sono ordinati per riga, da sinistra verso destra, con numero atomico crescente, andando a capo quando inizia il riempimento di un nuovo livello energetico. Ogni riga è detta **periodo** e corrisponde al riempimento degli orbitali di un livello. Ogni colonna è detta **gruppo**. Gli elementi di uno stesso gruppo hanno la stessa configurazione elettronica esterna, ovvero lo stesso numero di elettroni nel livello energetico esterno: questo viene definito **livello**, o **guscio di valenza**, e gli elettroni che vi risiedono sono detti **elettroni di valenza**.

I periodi sono 7 (corrispondenti ai sette livelli energetici) e sono indicati con numeri arabi. I gruppi sono stati tradizionalmente indicati con numeri romani e con la lettera A o B, successivamente la IUPAC¹ ha proposto una numerazione dei gruppi basata su un numero progressivo da 1 a 18. Gli elementi dei gruppi A, che corrispondono ai gruppi **1, 2, 13, 14, 15, 16, 17 e 18**, sono chiamati *elementi rappresentativi* e hanno gli elettroni più esterni negli orbitali *s* o *p*. Gli elementi dei gruppi B (dal 3 al 14) sono detti *elementi di transizione* e hanno il sottolivello *d* parzialmente riempito. Nel sesto e nel settimo periodo sono inserite due file di elementi chiamati *elementi di transizione interna* (lantanidi e attinidi), caratterizzati dal sottolivello *f* parzialmente riempito.

La tavola periodica può essere suddivisa anche in blocchi:

¹ L'International Union for Pure and Applied Chemistry è un'organizzazione non governativa internazionale dedicata al progresso della chimica, costituita nel 1919 a Londra e con sede centrale a Zurigo.



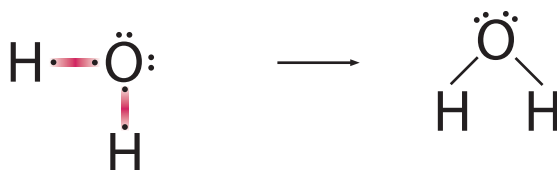
■ Doppie di legame e doppietti solitari

La coppia di elettroni condivisa prende il nome di *coppia o doppietto di legame*, mentre gli altri elettroni di valenza che non partecipano al legame vengono considerati anch'essi a coppie e chiamati *doppietti solitari*.

Costruiamo la molecola dell'acqua, H_2O



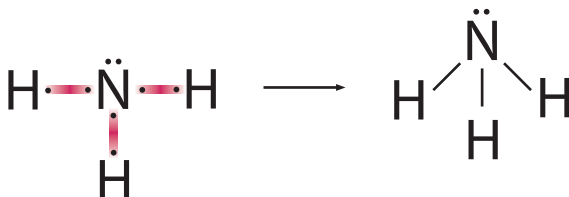
- L'atomo di O ha 6 elettroni di valenza e necessita di altri 2 elettroni per raggiungere l'ottetto,
- l'atomo di H possiede un elettrone e necessita di un altro elettrone per raggiungere la configurazione elettronica stabile $1s^2$.
- Combinandosi nella molecola dell'acqua, H_2O , sia l'atomo di ossigeno sia i due atomi di idrogeno raggiungono la stabilità elettronica.



Costruiamo la molecola dell'ammoniaca, NH_3



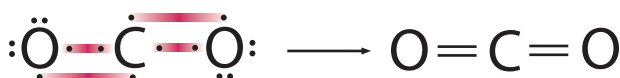
- L'atomo di N ha 5 elettroni di valenza e necessita di altri 3 elettroni per raggiungere l'ottetto,
- l'atomo di H possiede un elettrone e necessita di un altro elettrone per raggiungere la configurazione elettronica stabile $1s^2$.
- Combinandosi nella molecola dell'ammoniaca, NH_3 , sia l'atomo di azoto sia i tre atomi di idrogeno raggiungono la stabilità elettronica.



Costruiamo la molecola dell'anidride carbonica, CO_2



- L'atomo di O ha 6 elettroni di valenza e necessita di altri 2 elettroni per raggiungere l'ottetto.
- L'atomo di C possiede 4 elettroni ($2s^2 2p^2$) e necessita di altri 4 elettroni per raggiungere la configurazione elettronica stabile $2s^2 2p^6$.
- Combinandosi nella molecola dell'anidride carbonica, CO_2 , sia l'atomo di carbonio sia i due atomi di ossigeno raggiungono la stabilità elettronica.



Orbitali molecolari, legame σ e legame π

Quando si forma un legame covalente, due orbitali atomici si sovrappongono e si fondono formando un *orbitale molecolare*, di energia e forma diversa rispetto agli orbitali di partenza.

Un orbitale molecolare è la regione di spazio occupata da una coppia di elettroni di legame che circonda entrambi i nuclei dei due atomi legati.

La forma dell'orbitale molecolare dipende dal tipo di orbitali atomici di partenza e dalla loro modalità di sovrapposizione:

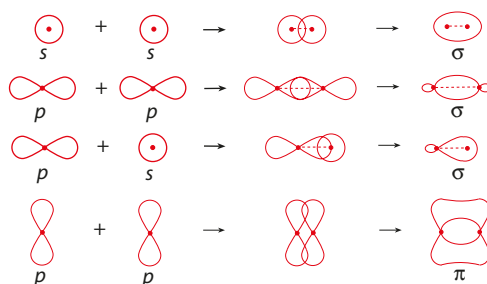
- se la sovrapposizione è *frontale* (testa/testa) si forma un legame covalente σ , formato da un orbitale che circonda da ogni parte l'asse che congiunge i due nuclei;
- se la sovrapposizione è *laterale* (fianco/fianco) si forma un *legame covalente π* , formato da un orbitale a due lobi giacente su un piano che contiene la congiungente i due nuclei.

Il legame π si forma solo per sovrapposizione laterale di orbitali p .

A causa della maggiore sovrapposizione degli orbitali, il legame σ è più forte del legame π .



Videorisoluzione
Legame π



Un legame covalente semplice è sempre di tipo σ .

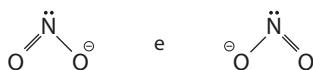
Il legame doppio è formato da un legame σ e un legame π .

Il legame triplo è formato da un legame σ e due legami π .



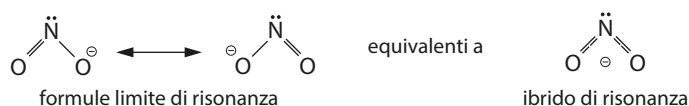
Risonanza e delocalizzazione elettronica

Per alcune molecole è possibile scrivere più di una formula di struttura; per esempio, per lo ione nitrito (NO_2^-) è possibile scrivere due formule di struttura:



Nessuna delle due formule rappresenta però la struttura reale della molecola: un doppio legame infatti in genere è più corto di un legame semplice, eppure si è osservato sperimentalmente che in NO_2^- i due legami hanno uguale lunghezza.

Le diverse formule possibili sono chiamate **forme limite di risonanza** (o forme mesomere) e si separano con una freccia a due punte; la sostanza reale ha una struttura intermedia tra quella delle forme limite ed è chiamata **ibrido di risonanza**. Per **energia di risonanza** si intende la differenza di energia tra l'ibrido di risonanza (la molecola reale) e la forma limite più stabile.



La risonanza è dovuta al fatto che gli elettroni del legame π , anziché essere condivisi, nel caso di NO_2^- , solo dall'atomo di N e da uno degli atomi di O, sono delocalizzati su tutta la molecola: forma cioè un **orbitale molecolare π delocalizzato**, esteso a tutti e tre gli atomi.

Un altro esempio di risonanza è rappresentato dal benzene (► Unità 8, Lezione 24).

Sintesi

Classificazione dei legami chimici



Orbitali ibridi

| Ibridazione | Angolo di legame | Forma della molecola |
|-------------|------------------|----------------------|
| sp^3 | 109,5° | tetraedrica |
| sp^2 | 120° | trigonale planare |
| sp | 180° | lineare |

Caratteristiche dei legami forti

| Legame covalente | Legame ionico | Legame metallico |
|--|--|---|
| Si stabilisce tra non metalli | Si stabilisce tra metalli e non metalli | Si stabilisce tra metalli |
| Condivisione di elettroni (sovrapposizione degli orbitali) → formazione di orbitali molecolari | Trasferimento di elettroni dal metallo al non metallo → formazione di ioni | Espulsione degli elettroni di valenza → condivisione degli elettroni in un orbitale esteso a tutta la massa del metallo |
| Legame direzionale legame σ (sovrapp. frontale) legame π (sovrapp. laterale) | Legame adirezionale | Legame adirezionale |
| Formazione di molecole | Formazione di reticoli cristallini ionici (solidi a T ambiente) | Formazione di reticoli cristallini metallici (solidi a T ambiente, eccetto Hg) |
| Sostanze rappresentate da formule molecolari | Sostanze rappresentate da formule minime | Sostanze rappresentate dai simboli degli elementi (metalli) |
| Puro – Polare – Dativo Ibridazione/Polarità/Risonanza | Natura elettrostatica | Malleabilità / Duttilità / Conduttività elettrica e termica |

Per calcolare il N.O. di un atomo si procede in questo modo:

1. seguendo le regole della tabella, scriviamo sopra a ogni atomo i numeri di ossidazione noti;
2. calcoliamo il numero di ossidazione ignoto impostando una semplice equazione, ricordandoci di moltiplicare ogni N.O. per il pedice dell'elemento.

Calcolare il N.O. di S in H_2SO_4 :

1. scriviamo i N.O. noti, ossia +1 sopra all'atomo di idrogeno e -2 sopra all'atomo di ossigeno:

$$\begin{array}{c} +1 \quad -2 \\ \text{H}_2\text{SO}_4 \end{array}$$
2. impostiamo l'equazione, tenendo conto di quanti atomi ci sono nel composto (in questo caso, due di idrogeno, uno di zolfo e quattro di ossigeno): $2 \cdot \text{N.O.}_\text{H} + \text{N.O.}_\text{S} + 4 \cdot \text{N.O.}_\text{O} = 0$
 sostituiamo i valori noti dei N.O. nell'equazione: $2 \cdot (+1) + \text{N.O.}_\text{S} + 4 \cdot (-2) = 0$
 risolviamo l'equazione: $2 + \text{N.O.}_\text{S} - 8 = 0$
 infine, otteniamo il N.O. richiesto: $\text{N.O.}_\text{S} = +6$



Calcolare il N.O. di N in NO_3^- :

1. NO_3^-

$$\begin{array}{c} -2 \\ \text{NO}_3^- \end{array}$$
2. $\text{N.O.}_\text{N} + 3 \cdot \text{N.O.}_\text{O} = -1$
 $\text{N.O.}_\text{N} + 3 \cdot (-2) = -1$
 $\text{N.O.}_\text{N} - 6 = -1$
 $\text{N.O.}_\text{N} = +5$



Calcolare il N.O. di C in CO_3^{2-} :

1. CO_3^{2-}

$$\begin{array}{c} -2 \\ \text{CO}_3^{2-} \end{array}$$
2. $\text{N.O.}_\text{C} + 3 \cdot \text{N.O.}_\text{O} = -2$
 $\text{N.O.}_\text{C} + 3 \cdot (-2) = -2$
 $\text{N.O.}_\text{C} - 6 = -2$
 $\text{N.O.}_\text{C} = +4$



Videorisoluzione

Numero di ossidazione

Altri elementi utili

Ogni elemento chimico può assumere determinati N.O., e non altri, come riportato nella tavola periodica. Osservandola, possiamo notare che:

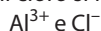
- non esistono numeri di ossidazione maggiori di +7;
- un elemento non può avere un N.O. maggiore del numero del suo gruppo di appartenenza, per esempio, gli elementi gruppo 15 o V A, non possono avere N.O. maggiore di +5;
- gli elementi dei gruppi 14 e 16 presentano solo N.O. pari;
- gli elementi dei gruppi 15 e 17 presentano solo N.O. dispari (fa eccezione l'azoto, che appartiene al gruppo 15, ma può avere N.O. anche +2).

A volte, quando si costruiscono le formule dei composti chimici, si parla di **valenza**, intendendo il numero di elettroni di un atomo impegnati nella formazione di legami.

La valenza è un numero sempre positivo, che assume gli stessi valori numerici del **numero di ossidazione**, quest'ultimo però è dotato di segno positivo o negativo perché tiene conto della diversa tendenza ad attrarre gli elettroni di legame.



Per costruire la formula di un composto formato da alluminio (Al) e cloro (Cl) si scrivono innanzitutto gli elementi coinvolti, in questo caso ioni, perché fra un metallo del gruppo III A e un non metallo molto elettronegativo come il cloro si forma un legame ionico:



Ora, per costruire una formula elettricamente neutra si pone al piede di ciascuno ione il numero di cariche (o numero di ossidazione) dell'altro:



La formula di questo composto è AlCl_3 .



Videorisoluzione
Nomenclatura

Tipi di nomenclatura

Talvolta due elementi possono legarsi in quantità diverse a dare composti diversi: per esempio, il carbonio e l'ossigeno possono portare alla formazione di CO o CO_2 , a seconda che il N.O. del carbonio sia +2 (in CO) o +4 (in CO_2). In questi casi è necessario distinguere i due composti utilizzando una nomenclatura inequivocabile.

Esistono tre modi per dare il nome a un composto inorganico:

- la nomenclatura **IUPAC** (*International Union of Pure and Applied Chemistry*) prevede l'utilizzo dei prefissi numerali greci (*mono-, di-, tri-* ecc.) per indicare i rapporti numerici fra gli atomi. Risulta inequivocabile, non necessita quindi di differenziare i diversi N.O.;
- la **notazione di Stock**, in base alla quale si indica il N.O. del metallo fra parentesi, utilizzando i *numeri romani*; per esempio lo ione Cu^+ è indicato come rame(I) (si legge rame-uno).
- la nomenclatura **tradizionale** secondo la quale si aggiungono i prefissi e/o i suffissi seguenti:
 - *ipo-...-oso*, quando il metallo presenta N.O. minore;
 - *-oso*, quando presenta il secondo N.O. in ordine crescente;
 - *-ico*, quando presenta il terzo N.O. in ordine crescente;
 - *per-...-ico*, quando presenta il N.O. maggiore.

Se il metallo possiede solo due N.O., si usano solo i suffissi *-oso*, per il N.O. minore, e *-ico*, per il N.O. maggiore.

La tabella seguente riporta i nomi di alcuni ioni con diverso numero di ossidazione e la rispettiva nomenclatura.

| Elemento | Ione | Nomenclatura tradizionale | Notazione di Stock |
|-----------|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| Rame | Cu^+ Cu^{2+} | rameoso rameico | rame(I) rame(II) |
| Ferro | Fe^{2+} Fe^{3+} | ferroso ferrico | ferro(II) ferro(III) |
| Piombo | Pb^{2+} Pb^{4+} | piomboso piombico | piombo(II) piombo(IV) |
| Manganese | Mn^{2+} Mn^{3+} | manganoso manganico | manganese(II) manganese(III) |

Quesiti commentati

Vuoi metterti alla prova con 5 quesiti facili? Inquadra il QRcode a fianco. Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



1 Quale dei seguenti composti contiene un elemento con numero di ossidazione -3 ?

- A AlCl_3
- B KHSO_4
- C $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$
- D PH_3
- E CrO_3

2 Qual è il numero di ossidazione del cromo nello ione $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$?

- A -2
- B $+2$
- C $+3$
- D $+6$
- E $+7$

3 Negli ossiacidi a quale elemento è legato l'idrogeno acido?

- A All'ossigeno
- B Al carbonio
- C Al non-metallo
- D Ad un altro atomo di idrogeno
- E All'azoto

4 Qual è la formula del bicarbonato di ammonio, usato per la lievitazione dei dolci?

- A NH_4HCO_3
- B NH_4CO_3
- C $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$
- D NH_3HCO_3
- E NH_3CO_3

5 Un metallo alcalino, in presenza di ossigeno:

- A forma l'ossido corrispondente
- B forma l'idrossido corrispondente
- C resta inalterato essendo scarsamente reattivo
- D reagisce in rapporto stechiometrico 1:1
- E forma l'anidride corrispondente

6 Se M rappresenta un metallo alcalino-terroso, quale fra le seguenti è la formula corretta per il suo composto con il cloro?

- A M_2Cl_3
- B MCl_2
- C MCl^-
- D M_2Cl
- E MCl

7 Quale/i delle seguenti affermazione/i relative ai non metalli è/sono corretta/e?

1. Formano ossidi basici
2. Formano ossidi acidi
3. Hanno bassa elettronegatività

- A Solo la 1
- B Solo la 2
- C Solo la 3
- D Solo la 1 e la 3
- E Solo la 2 e la 3

8 Quale dei seguenti schemi di reazione NON è corretto?

- A Alogeno + idrogeno \rightarrow idruro
- B Metallo + ossigeno \rightarrow ossido basico
- C Metallo + non-metallo \rightarrow sale binario
- D Non-metallo + ossigeno \rightarrow ossido acido
- E Ossido basico + acqua \rightarrow idrossido

9 Il cloruro ferrico è:

- A FeClO
- B FeCl_2
- C FeCl_3
- D FeCl_4
- E FeCl

10 Qual è la formula dell'acido iodidrico?

- A HI
- B HI_2
- C HIO_2
- D HIO_3
- E H_2I

11 Il composto NaH_2PO_4 :

- A è un sale
- B non può esistere
- C è un idrossido
- D non è un sale perché è un composto quaternario
- E non è un sale perché possiede ancora proprietà acide

12 Indicare quale delle seguenti formule è errata.

- A HClO_4
- B NH_4SO_4
- C $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$
- D KHSO_4
- E KH_2PO_4

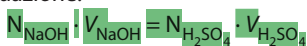
Qual è il volume di NaOH 0,30 M necessario per titolare 40 mL di H₂SO₄ 0,15 M?

NaOH è una base monoprotica, quindi la sua normalità coincide con la sua molarità (0,3 N);

H₂SO₄ è un acido biprotico, quindi una mole di acido rilascia due moli di ioni H⁺ e la sua normalità è pari a:

$$0,15 \text{ M} \cdot 2 \text{ eq/mol} = 0,3 \text{ N}$$

Sostituiamo i valori noti nell'equazione:



$$0,3 \text{ N} \cdot V_{\text{NaOH}} = 0,3 \text{ N} \cdot 40 \text{ mL}$$

da cui:

$$V_{\text{NaOH}} = \frac{0,3 \text{ N} \cdot 40 \text{ mL}}{0,3} = 40 \text{ mL}$$

Per titolare 40 mL di H₂SO₄ 0,15 M sono necessari 40 mL di NaOH 0,30 M.

Soluzioni tampone

Soluzioni in grado di mantenere il proprio pH quasi invariato anche dopo l'aggiunta di piccole quantità di acidi o di basi forti.

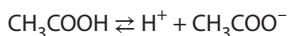


Videorisoluzione
Soluzione tampone

Una soluzione tampone è costituita da una soluzione acquosa di un acido debole e di un suo sale con una base forte (o di una base debole e di un suo sale con un acido forte) in concentrazioni opportune (abbastanza elevate e circa uguali).

Il pH non varia se alla soluzione viene addizionato solvente puro: **diluendo una soluzione tampone il suo pH rimane invariato.**

In una miscela equimolecolare di acido acetico (CH₃COOH, acido debole) e di acetato di sodio (CH₃COONa, sale dell'acido acetico con l'idrossido di sodio, base forte), l'acido acetico dà luogo all'equilibrio di dissociazione:



Aggiungendo HCl (in concentrazione bassa rispetto a quella del tampone) il pH varia di poco, perché gli ioni H⁺ liberati dall'acido forte vengono quasi completamente "catturati" dalla base CH₃COO⁻ (base molto più forte di Cl⁻) per formare CH₃COOH. Analogamente, l'aggiunta di una piccola quantità di KOH, base forte, viene "tamponata" da CH₃COOH.

Per questo tampone si ha:

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \text{Log } C_S/C_A$$

dove:

- $\text{p}K_a = -\text{Log } K_a$
- C_S = concentrazione del sale
- C_A = concentrazione dell'acido

Il pOH di una soluzione tampone formata da (NH₃, base debole) e di cloruro di ammonio (NH₄Cl, sale dell'ammoniaca con l'acido cloridrico, acido forte) è dato da:



$$\text{pOH} = \text{p}K_b + \text{Log } C_S/C_B$$

dove:

- $\text{p}K_b = -\text{Log } K_b$
- C_S = concentrazione del sale
- C_B = concentrazione della base

Il sangue umano mantiene un pH costante (compreso fra 7,35 e 7,45) grazie all'esistenza di parecchi sistemi tamponanti.



Sintesi

| Definizione secondo: | Acido | Base |
|-----------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| Arrhenius | cede H^+ | cede OH^- |
| Brønsted-Lowry | cede H^+ | acquista H^+ |
| Lewis | acquista doppietto di elettroni | cede doppietto di elettroni |

■ Prodotto ionico dell'acqua (a 25 °C)

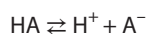
$$K_w = 10^{-14}$$

Ne consegue che:

$$K_a \cdot K_b = [H^+] \cdot [OH^-] = K_w = 10^{-14}$$

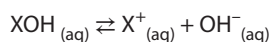
$$pH + pOH = 14$$

■ Costante di dissociazione dell'acido



$$K_a = \frac{[H^+] \cdot [A^-]}{[HA]}$$

■ Costante di dissociazione della base



$$K_b = \frac{[X^+] \cdot [OH^-]}{[XOH]}$$

■ Calcolo del pH

Acido forte

$$pH = -\text{Log} [H_3O^+] = -\text{Log} C_A$$

Base forte

$$pOH = -\text{Log} [OH^-] = -\text{Log} C_B$$

$$pH = 14 - pOH$$

Soluzione tampone

$$pH = pK_a + \text{Log} C_S/C_A$$

■ Titolazioni acido-base

$$V_A \cdot N_A = V_B \cdot N_B$$

■ Idrolisi salina

| Acido | Base | Idrolisi salina | Esempio |
|--------|--------|-----------------|--|
| Forte | Forte | Neutra | $HCl + NaOH \rightleftharpoons NaCl$ |
| Forte | Debole | Acida | $HCl + NH_3 \rightleftharpoons NH_4Cl$ |
| Debole | Forte | Basica | $CH_3COOH + NaOH \rightleftharpoons NaCH_3COO$ |
| Debole | Debole | Dipende | $CH_3COOH + NH_3 \rightleftharpoons NH_4CH_3COO$ |

- 11** K_a è la costante di dissociazione acida. pK_a è semplicemente l'opposto del logaritmo di questa costante: $pK_a = -\text{Log } K_a$. Allo stesso modo, K_b è la costante di dissociazione della base:

$$pK_b = -\text{Log } K_b.$$

pK_a e pK_b sono correlati dalla semplice relazione:

$$pK_a + pK_b = 14$$

Acidi forti hanno K_a elevata ($K_a > 10^{-1}$) e pK_a piccolo; basi forti analogamente hanno K_b elevato ($K_b > 10^{-1}$) e pK_b piccolo. Il valore di pK_b di 4,75 corrisponde ad una base debole: possiamo affermare che per le basi deboli $2 \leq pK_b \leq 14$; analogamente per gli acidi deboli $2 \leq pK_a \leq 14$. Nell'esercizio proposto, in un litro di soluzione sono disciolte un ugual numero di moli di HCl (acido forte) con un ugual numero di moli di NH_3 (base debole avendo pK_b compreso fra 2 e 14), pertanto la soluzione avrà un pH acido. La risposta corretta è pertanto la **A**.

Alla stessa risposta si poteva anche pervenire ricordando che un quesito non può avere due risposte esatte e osservando che:

- le risposte **B** e **D** sono equivalenti, quindi entrambe errate;
- le risposte **C** e **E** sono equivalenti, quindi entrambe errate.

La risposta corretta quindi non può che essere la **A**.

► Unità 7, Lezione 25

- 12** In una reazione chimica tra un acido forte (per esempio, l'acido cloridrico) e una base forte (per esempio, l'idrossido di sodio) otteniamo come prodotti un sale neutro e l'acqua: si tratta di una reazione di doppio scambio. Per esempio, la reazione tra HCl e NaOH darà come prodotti NaCl e acqua: NaCl è costituito da uno ione Na^+ (che non influisce sul pH, in quanto acido coniugato di una base forte) e da uno ione Cl^- (anch'esso non influente sul pH, poiché è la base coniugata di un acido forte). Il cloruro di sodio è pertanto un sale neutro e non cambia il pH della soluzione in cui si trova. L'alternativa corretta è la **B**.

► Unità 7, Lezione 25

- 13** Le soluzioni tampone sono costituite da sali acidi (o basici) e dai loro corrispettivi acidi (o basi) in quantità opportune, per esempio un acido debole (acido acetico) e il suo sale con una base forte (acetato di sodio). Il pH di queste soluzioni dipende dalle costanti di dissociazione acida (o basica) dei componenti utilizzati (la **A**, la **D** e la **E** sono false). La loro caratteristica consiste nel mantenere il pH della soluzione costante a fronte di aggiunte moderate di acidi o basi forti (risposta **C** corretta). Tuttavia, se le quantità di acido o base forte sono considerevoli, la capacità tamponante viene meno e il pH della soluzione varia (risposta **B** errata).

► Unità 7, Lezione 25

Vuoi metterti alla prova con 5 domande difficili sugli argomenti di questa Unità?
Inquadra il QRcode a fianco.

Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



8

Mitosi

UNITÀ 2

Riproduzione cellulare e degli organismi

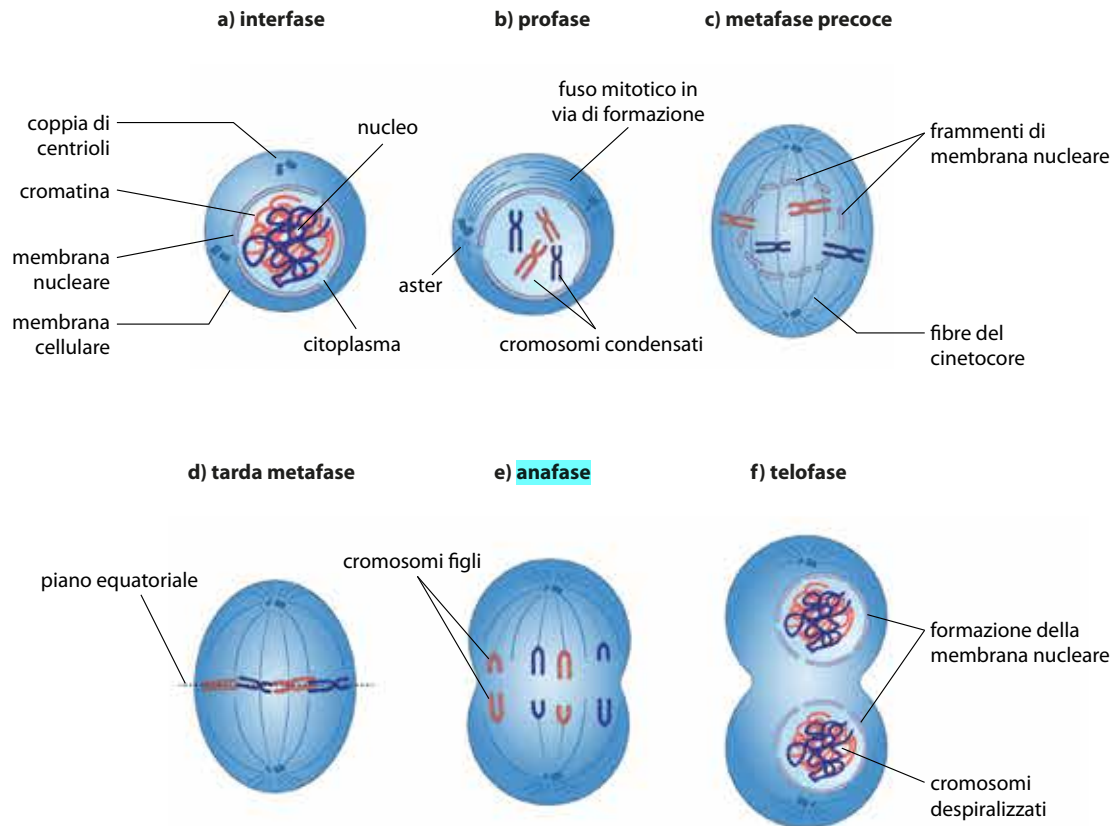
La mitosi è il processo tramite il quale **il nucleo di una cellula eucariote si divide, dando origine a due nuclei figli**, ciascuno dotato di una serie completa di cromosomi.

Alla divisione del nucleo segue in genere (ma non necessariamente) la divisione del citoplasma, indicata come **citodieresi** (detta anche *citochinesi*, o *citocinesi*).

All'inizio della mitosi, i cromosomi, che durante l'interfase sono despiralizzati e appaiono come un ammasso di cromatina indifferenziata, si condensano e iniziano a presentarsi sotto forma di corpuscoli corti e tozzi.

Dato che il DNA si è duplicato durante la fase S del ciclo cellulare, ogni cromosoma di una cellula che entra in mitosi è costituito da due filamenti di DNA identici, chiamati *cromatidi fratelli*; i cromatidi sono uniti in una regione chiamata *centromero*, mentre le estremità dei cromosomi sono indicate come *telomeri*. Pur essendo un processo continuo, la mitosi viene suddivisa in quattro fasi: profase, metafase, anafase, telofase.

▼ Le fasi della mitosi in una cellula animale.



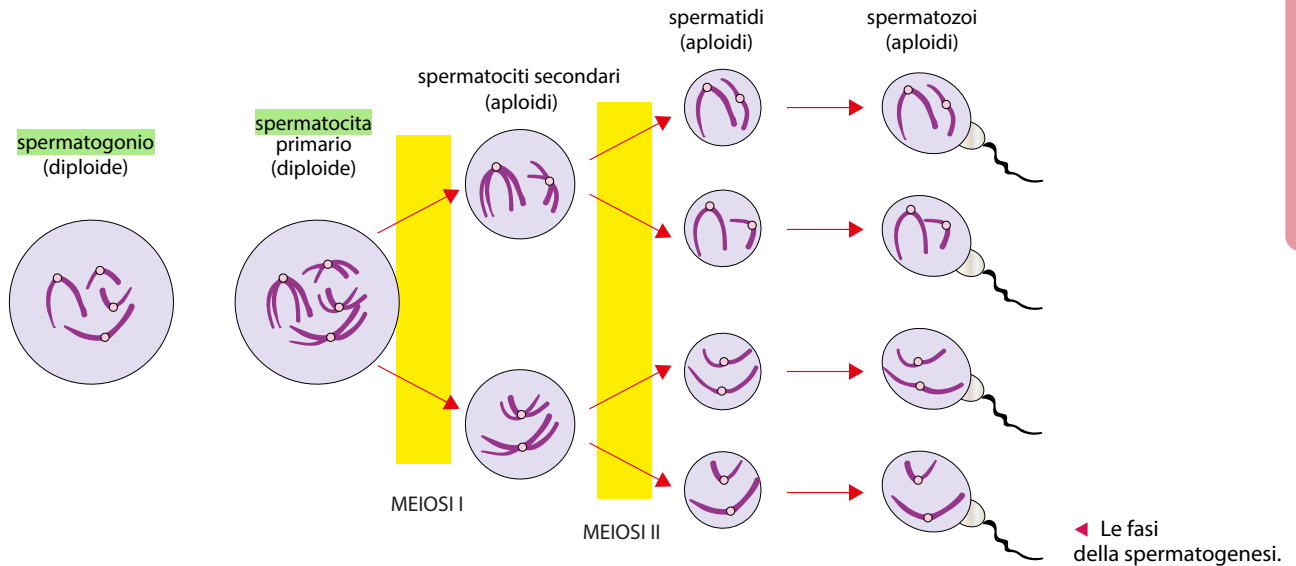
- **Profase:** il DNA si spiralizza, si condensa e comincia ad assumere l'aspetto di corpuscoli visibili al microscopio ottico. La membrana nucleare si dissolve e i nucleoli diventano poco visibili o scompaiono. Contemporaneamente, nel citoplasma, i due centrosomi (ognuno contenente una coppia di centrioli, duplicatisi durante la fase S) iniziano a migrare verso i due poli opposti della cellula, dando origine al *fuso mitotico*, un insieme di fibre costituite da microtubuli che attraversa tutta la cellula e collega le due coppie. Dai centrioli si dirama anche un insieme di corti microtubuli disposti a raggiera, che formano l'*aster*.

Gametogenesi

Il processo di formazione dei gameti è detto gametogenesi e avviene nelle gonadi. Negli animali i gameti maschili sono gli *spermatozoi*, quelli femminili le *cellule uovo* (o *uova*). La gametogenesi maschile è detta spermatogenesi, mentre quella femminile è detta ovogenesi.

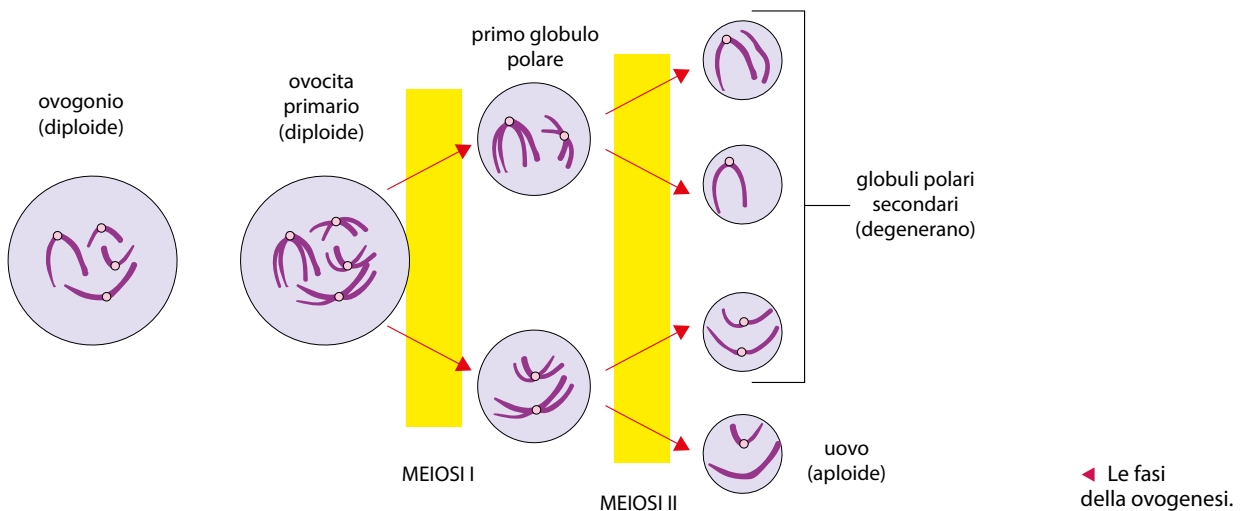
Spermatogenesi

Nelle gonadi maschili gli *spermatogoni* ($2n$) si differenziano in spermatociti primari ($2n$) che vanno quindi incontro alla prima divisione meiotica, originando cellule aploidi di uguale dimensione, note come *spermatociti secondari* (n). Questi vanno incontro alla seconda divisione meiotica producendo cellule aploidi, gli *spermatidi*, che matureranno in spermatozoi.



Ovogenesi

Nelle gonadi femminili gli *ovogoni* ($2n$) si differenziano in *ovociti primari* ($2n$) che vanno incontro alla prima divisione meiotica con produzione di due cellule aploidi di dimensioni diverse: un *ovocita secondario* e una piccola cellula nota come *globulo polare*. Mentre quest'ultimo può andare incontro a una seconda divisione, formando due nuovi globuli polari, oppure degenerare e morire, l'ovocita secondario, se si verifica la fecondazione, va incontro alla seconda divisione meiotica, producendo una cellula uovo e un altro piccolo globulo polare.



Quesiti commentati

Vuoi metterti alla prova con 5 quesiti facili? Inquadra il QRcode a fianco. Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



1 Il M.C.D. e il m.c.m. fra $8ab^2$, $3a$, $2abc$ sono rispettivamente:

- A $3c, 2abc$
- B $a, 24ab^2c$
- C $2abc, 48a^3b^3c$
- D $8a, 24a$
- E $3a, 8ab^3c$

2 Il polinomio $5a^2b^2 - \frac{1}{5}a^4 + 3 + 2b^4$:

- A è omogeneo
- B ha un termine che è un monomio fratto
- C è di 4° grado
- D è la somma di due quadrati
- E nessuna delle altre risposte è corretta

3 Il polinomio $x^2(x^2 + 15) - 8x^3$ è equivalente a:

- A $x^2[x(x-8) + 15]$
- B $-x^2(x-3) \cdot (x+5)$
- C $x^2(x+15-8x^3)$
- D $x^2(x-5) \cdot (x+3)$
- E $x^2(x^2+7)$

4 L'espressione $(a^2 + b^2)^2$ è uguale a:

- A $(a^2 + b^2) - (2ab)^2$
- B $(a+b)^3 \cdot (a-b)$
- C $(a-b)^3 \cdot (a+b)$
- D $[(a-b)^2 + 2ab]^2$
- E $(a^2 + b^2) + 2ab$

5 Il quadrato del trinomio $(a - b - c)$ è uguale a:

- A $(a + b + c) \cdot (a - b - c)$
- B $a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- C $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$
- D $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$
- E $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

6 Indicare quante coppie ordinate $(m; n)$ di interi positivi m e n verificano la condizione:

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 64$$

- A Nessuna
- B Cinque
- C Sei
- D Dieci
- E Infinite

7 Qual è il resto della seguente divisione?

$$(x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 1) : (x - 2)$$

- A -1
- B 11
- C -17
- D -11
- E 0

8 La scomposizione in fattori del polinomio

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 \text{ è:}$$

- A $(x-1) \cdot (x^3-2)$
- B $(x-1) \cdot (x-2)^3$
- C $(x-1)^2 \cdot (x+1)$
- D $(x-1)^2 \cdot (x-2)^2$
- E $(x-1) \cdot (x^3+2)$

9 Il numero $\frac{49^{40} - 1}{7^{40} - 1}$ è uguale a:

- A $42^{40} - 1$
- B $49^{20} + 1$
- C $7^{40} - 1$
- D 7^{40}
- E 42^{40}

10 L'espressione algebrica $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$ è uguale a:

- A $\frac{x-3}{2x+1}$
- B $\frac{3-x}{2x^2+x}$
- C $\frac{x+3}{2x^2+x}$
- D $\frac{x-3}{x-2x^2}$

E numeratore e denominatore non hanno fattori comuni, quindi l'espressione non è semplificabile

11 Semplificare la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 2x^2}$$

- A $x+1$
- B $\frac{x-1}{x(x+1)}$
- C $\frac{x+1}{x}$
- D $\frac{-1}{x^3 + x + 2x^2}$
- E $\frac{x}{x(x+1)}$

12 Quale delle espressioni sotto elencate è uguale alla seguente espressione algebrica?

$$\frac{a^2 - b^2}{a(a+b)}$$

- A $1 - b/a$
- B $(a+b)/a$
- C $-b$
- D $(a-b^2)/(a+b)$
- E Nessuna delle altre risposte è corretta

Sintesi

Logaritmi

► Il $\log_a b$ è, per definizione, l'esponente da attribuire alla base a per ottenere l'argomento b :

$$x = \log_a b \leftrightarrow \text{se e solo se } a^x = b$$

sotto le condizioni $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Segno del logaritmo

► Un logaritmo è **positivo** quando la base e l'argomento sono:

► entrambi maggiori di 1:
$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b > 0$$

oppure:

► compresi tra 0 e 1:
$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b > 0$$

► Un logaritmo è **negativo** quando:

► la base è maggiore di 1 e l'argomento è compreso tra 0 e 1:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b < 0$$

oppure:

► la base è compresa tra 0 e 1 e l'argomento è maggiore di 1:

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b < 0$$

Teoremi sui logaritmi

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$:

► $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

► $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

► $\log_a(b)^n = n \cdot \log_a b$

► $\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$

► $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

► $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

Logaritmi fondamentali

► Logaritmi decimali (Log): sono logaritmi in base 10.

► Logaritmi naturali o neperiani (ln): sono logaritmi in base $e = 2,71828\dots$ = numero di Eulero.

Formula del cambiamento di base

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

da cui:

$$\text{Log } b = \frac{\ln b}{\ln 10}$$

$$\ln b = \frac{\text{Log } b}{\text{Log } e}$$

Equazione canonica della retta e coefficiente angolare

Partendo dall'equazione generale della retta $ax + by + c = 0$, nell'ipotesi $b \neq 0$, possiamo scrivere:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow by = -ax - c \rightarrow y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b} \quad [2]$$

Introducendo le seguenti definizioni:

$$-\frac{a}{b} = m \xrightarrow{\text{def}} \text{coefficiente angolare} \quad -\frac{c}{b} = q \xrightarrow{\text{def}} \text{termine noto}$$

la [2] diventa:

$$y = mx + q$$

che prende il nome di **equazione canonica della retta**.

► L'equazione canonica $y = mx + q$ rappresenta tutte e sole le rette del piano che sono grafici di funzioni (► Unità 7).

L'equazione generale $3x + 2y - 4 = 0$ in forma canonica diventa $y = -\frac{3}{2}x + 2$.



L'equazione generale della retta, $ax + by + c = 0$, è in **forma implicita**, mentre l'equazione canonica, $y = mx + q$, è in **forma esplicita**.

Mentre l'equazione generale $ax + by + c = 0$ rappresenta **tutte** le rette del piano, l'equazione canonica $y = mx + q$ traslascia le rette verticali (parallele all'asse y) e **non** rappresenta dunque **tutte** le rette del piano (si è infatti posto $b \neq 0$ per passare da una equazione all'altra).



Data una retta di equazione $ax + by + c = 0$, **il suo coefficiente angolare è un indice di quanto la retta è inclinata rispetto all'asse x** .

Per le rette verticali (le cui equazioni **non** possono essere portate in forma canonica) **non si definisce il coefficiente angolare**.

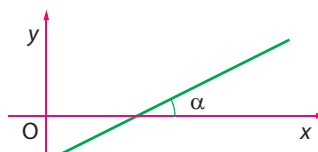


Indicando con α l'angolo orientato in senso antiorario formato dalla retta e dalla semiretta positiva delle ascisse, si ha che:

- se l'angolo α è acuto ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) $\rightarrow m > 0$
- se l'angolo α è ottuso ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) $\rightarrow m < 0$
- se l'angolo α è nullo ($\alpha = 0^\circ$) $\rightarrow m = 0$

Per la definizione di tangente (► Unità 8, Lezione 21) si ha:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$



Videorisoluzione
Retta individuata da un'equazione parametrica

Rette parallele e perpendicolari

Date due rette, con coefficienti angolari m_1 e m_2 , la **condizione di parallelismo** è:

$$m_1 = m_2$$

mentre la **condizione di perpendicolarità** è:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



Videopillola
Parallelismo e perpendicolarità

- Le rette $y = 3x + 1$ e $6x - 2y = 5$ sono parallele poiché hanno lo stesso coefficiente angolare ($m = 3$ per entrambe).
- Le rette $y = -2x + 1$ e $-x + 2y = 0$ sono invece perpendicolari.



Due rette di equazioni (in forma implicita) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, sono:

- parallele $\leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$
- perpendicolari $\leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$



Funzioni suriettive, iniettive e biettive

Una funzione da X in Y si dice **suriettiva** quando **ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X** .

In simboli:

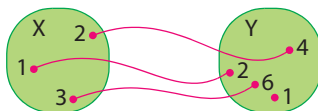
$$f(X) = Y$$

Infatti, ogni elemento di Y non è necessariamente l'immagine di un elemento di X : vi possono essere uno o più elementi di Y che non sono immagine di alcun elemento di X .

Si considerino i due insiemi $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 4, 6\}$ e la funzione:

$$y = 2x$$

Allora $f(X) = \{2, 4, 6\}$: si tratta quindi di un sottoinsieme proprio di Y e la funzione **non** è suriettiva.



Una funzione da X in Y si dice **iniettiva** se **a elementi distinti di X fa corrispondere elementi distinti di Y** .

In simboli:

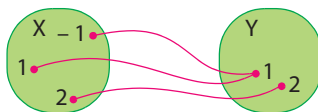
$$\text{se } x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Infatti, un elemento di $f(X)$ potrebbe essere l'immagine di più di un elemento di X .

Siano $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2\}$ e:

$$y = |x|$$

Allora $f(X) = \{1, 2\}$ e l'elemento $y = 1$ è immagine di due elementi distinti di X ($x = 1$ e $x = -1$) e la funzione **non** è iniettiva.



Una funzione da X in Y che sia **contemporaneamente iniettiva e suriettiva** si dice **biettiva** o **biunivoca**.

Campo di esistenza

Il campo di esistenza (o **dominio**) di una funzione è **l'insieme dei valori della variabile indipendente per cui la funzione risulta definita**.



Di seguito si riportano i campi di esistenza per le principali tipologie di funzioni.

- **Funzioni razionali intere**: esistono per ogni valore reale della x .

$$y = x + 2: \text{ esiste per ogni } x \text{ reale} \rightarrow \text{C.E.: } \mathbb{R}$$



- **Funzioni razionali frazionarie**: il denominatore deve essere diverso da zero.

$$y = \frac{x+3}{x+2}: \text{ esiste per } x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2 \rightarrow \text{C.E. } x \neq -2$$



- **Funzioni irrazionali**: se l'indice di radice è pari, il radicando deve essere non negativo.

$$y = \sqrt{x+2}: \text{ esiste per } x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow \text{C.E. } x \geq -2$$



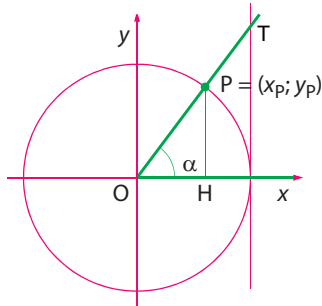
► A livello pratico, una funzione da X in Y è definita per i valori di x per cui esistono i corrispondenti valori di y .

Seno, coseno e tangente

Una circonferenza è detta **orientata** quando si fissa su di essa **il verso antiorario come positivo**.

Viene detta **circonferenza goniometrica** una qualsiasi circonferenza orientata alla quale sia associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e nel quale si assume come unità di misura dei segmenti il raggio della circonferenza. In questo modo **la circonferenza goniometrica ha raggio unitario e centro nell'origine del sistema di riferimento**.

Si consideri una circonferenza goniometrica e un qualsiasi angolo orientato α con il primo lato coincidente con la semiretta positiva delle x . Sulla circonferenza goniometrica, si indichi con P il punto di intersezione fra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza, e con H l'intersezione fra il primo lato dell'angolo e la retta verticale passante per P .



Si definisce **seno** dell'angolo orientato α **l'ordinata del punto P**, ossia:

$$\operatorname{sen} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} y_p = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$$

Si definisce **coseno** dell'angolo orientato α **l'ascissa del punto P**, ossia:

$$\operatorname{cos} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_p = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$$

Si definisce **tangente** dell'angolo orientato α **il rapporto (se esiste) fra l'ordinata e l'ascissa del punto P**, ossia, il che è lo stesso, **il rapporto (se esiste) fra il seno e il coseno** dell'angolo stesso:

$$\operatorname{tg} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_p}{x_p} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}$$

La tangente può anche essere definita come l'ordinata del punto T in figura, intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica condotta dal suo punto di coordinate $(1; 0)$; $\operatorname{tg} \alpha = y_T$.

Il seno, il coseno e la tangente di un angolo orientato α sono:

- **funzioni dell'angolo**, ossia dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo α ;
- **adimensionali**, in quanto definiti anche come rapporto tra misure di segmenti;
- **numeri reali relativi**, quindi possono essere positivi, nulli o negativi.



Anche per le funzioni goniometriche è importante conoscere il **campo di esistenza**:

- **seno e coseno** sono definiti per **ogni valore di α** ;
- la **tangente** è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$;

Inoltre, si definiscono altre funzioni goniometriche (di importanza minore):

$$\operatorname{cotangente}: \operatorname{cotg} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \operatorname{secante}: \operatorname{sec} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \operatorname{cosecante}: \operatorname{cosec} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$



Approfondimento
Cotangente, secante e cosecante

► Quando il secondo lato dell'angolo appartiene al primo, secondo ... quadrante, per brevità si usa dire che l'angolo appartiene al primo, secondo ... quadrante.

► Osserviamo che \overline{PH} e \overline{OH} indicano le misure dei segmenti orientati **PH e OH** (► Unità 6, Lezione 13), mentre $\overline{OP} = 1$.

Valore delle funzioni goniometriche per angoli particolari

È importante conoscere i valori che le funzioni goniometriche assumono in corrispondenza degli angoli (detti anche archi notevoli) riportati nella tabella seguente.

| Angolo (in gradi) | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 270° | 360° |
|-------------------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|-------------------|--------|
| Angolo (in radianti) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | π | $\frac{3}{2}\pi$ | 2π |
| sen | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | 0 | 1 |
| tg | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | non esiste | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | non esiste | 0 |



Approfondimento
Funzioni goniometriche inverse

Archi associati

Esistono alcune formule che consentono di ricavare, a partire da alcuni valori della tabella del paragrafo precedente, i valori delle funzioni goniometriche in corrispondenza di tutti gli angoli indicati e di altri che compaiono frequentemente nei test.

- α ; $(90^\circ - \alpha)$ (angoli complementari):

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= 1/\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni goniometriche degli angoli di 60° e 90° partendo dagli angoli di 30° e 0° .

► Poiché $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, anche con la formula a lato ritroviamo che $\operatorname{tg} 90^\circ$ non esiste.

- α ; $(180^\circ - \alpha)$ (angoli supplementari):

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni goniometriche degli angoli di 120° , 135° , 150° , 180° .

- α ; $(180^\circ + \alpha)$:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni goniometriche degli angoli di 210° , 225° , 240° , 270° .

► 300° (verso positivo, cioè antiorario) corrisponde a -30° (verso negativo, cioè orario) ecc.

- α ; $-\alpha$ (angoli opposti):

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Da queste relazioni si ricavano i valori delle funzioni goniometriche degli angoli di 300° , 315° , 330° , 360° .



- $\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Rappresentazione grafica delle funzioni seno, coseno e tangente

Prima di affrontare la rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche è utile fornire la seguente definizione.

Una funzione $y = f(x)$ si dice **periodica** di periodo T quando vale la seguente relazione:

$$f(x) = f(x + kT) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Più semplicemente, **una funzione è periodica quando il suo grafico si ripete periodicamente**, è quindi sufficiente saperlo tracciare per valori di x appartenenti a un intervallo di ampiezza uguale al periodo T e poi ripeterlo a intervalli regolari.

Sinusoide: è il grafico della funzione

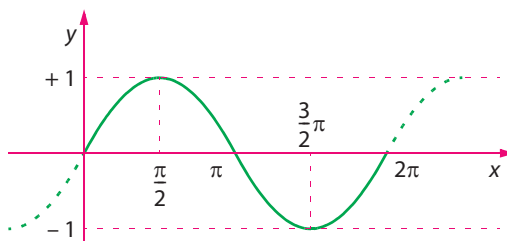
$$y = \sin x$$

È una funzione dispari, limitata tra -1 e $+1$ e periodica di periodo T pari a 2π :

$$-1 \leq \sin x \leq +1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$T = 2\pi = 360^\circ$$

È positiva per $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, negativa per $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ e nulla per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.



Cosinusoide: è il grafico della funzione

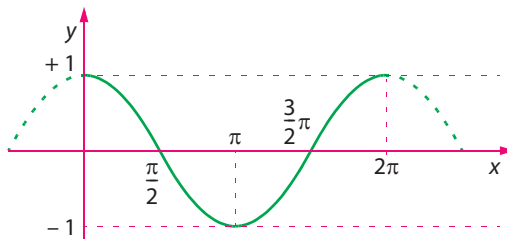
$$y = \cos x$$

È una funzione pari, limitata tra -1 e $+1$ e periodica di periodo T pari a 2π :

$$-1 \leq \cos x \leq +1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$T = 2\pi = 360^\circ$$

È positiva per $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e per $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, negativa per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ e nulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.



Tangente: è il grafico della funzione

$$y = \tan x$$

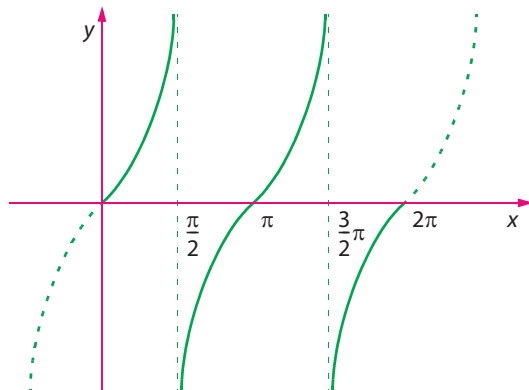
È una funzione dispari; diversamente dalle precedenti è illimitata (sia inferiormente sia superiormente) ed è periodica di periodo T pari a π .

$$T = \pi = 180^\circ$$

La funzione non è definita per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, è positiva per $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, negativa per $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$ e nulla per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

La tangente presenta infiniti asintoti verticali (le rette verticali, tratteggiate in figura, a cui la curva si avvicina indefinitamente, ► Unità 6, Lezione 15) di equazione:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



Approfondimento

Periodo delle funzioni composte

► Osserviamo che la scrittura $x = k\pi$ è equivalente a $x = \pi + k\pi$.



Mappa

Funzioni goniometriche

23 Equazioni goniometriche

Un'equazione goniometrica è un'equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di una funzione goniometrica.

Anche per le equazioni goniometriche si può usare il metodo della verifica, prestando attenzione alla periodicità. Per usare il metodo della verifica si devono conoscere i valori delle funzioni goniometriche degli angoli più "importanti":

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 360^\circ$



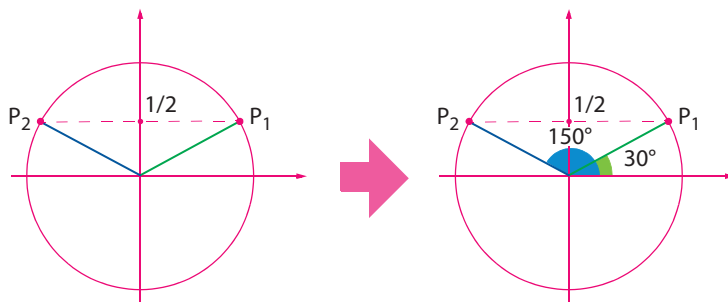
Equazioni elementari

Le equazioni goniometriche elementari risolubili sono equazioni del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = a \\ \cos x = b \\ \operatorname{tg} x = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{con } -1 \leq a \leq 1 \\ \text{con } -1 \leq b \leq 1 \\ \text{con } c \text{ qualsiasi} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{se } a \text{ e } b \text{ fossero minori di } -1 \text{ o maggiori di } +1 \\ \text{l'equazione sarebbe impossibile} \end{array} \right\}$$

L'esempio seguente chiarisce il metodo di risoluzioni delle equazioni elementari.

Per risolvere l'equazione $\sin x = 1/2$ si devono trovare gli angoli il cui seno vale $1/2$: per farlo, si disegna la circonferenza goniometrica, si traccia la retta orizzontale $y = 1/2$, si individuano le intersezioni di questa retta con la circonferenza e si cercano gli angoli tali che il punto P venga a trovarsi in suddette intersezioni.



Si trovano così due angoli ($30^\circ = \pi/6$ e $150^\circ = 5\pi/6$) il cui seno vale $1/2$.

Oltre ai due angoli trovati, per la periodicità della funzione seno si devono però considerare tutti gli angoli che si ottengono sommando multipli di 2π .

La soluzione diventa quindi:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Le equazioni goniometriche elementari non impossibili ammettono infinite soluzioni a causa della periodicità delle funzioni goniometriche.



26 Geometria piana

Enti geometrici fondamentali

Gli enti geometrici fondamentali sono il *punto*, la *retta* e il *piano*: si tratta di **concetti primitivi**, ossia non definibili tramite concetti più semplici.

La geometria *razionale* o *euclidea* (da Euclide, il più importante matematico dell'antichità che ne riorganizzò in forma deduttiva tutte le conoscenze) è basata su 5 **postulati** o **assiomi**, proposizioni derivate direttamente dall'intuizione e che si accettano senza dimostrazione:

1. si può tracciare una retta da un punto qualsiasi a ogni altro punto;
2. si può prolungare indefinitamente una linea retta;
3. si può descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali fra loro;
5. se una retta, che interseca altre due rette, forma dalla stessa parte angoli la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette, indefinitamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi.

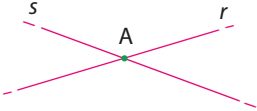

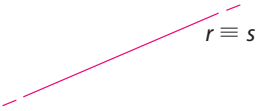
I postulati 1 e 2, modernamente riformulati, ci assicurano che **per due punti distinti passa una e una sola retta**.



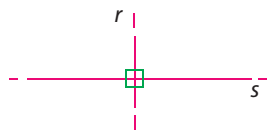
Approfondimento
Luoghi geometrici

Rette, semirette, segmenti e angoli

Due rette possono assumere nel piano le seguenti configurazioni:

| | | |
|--|--|---|
|  |  |  |
| incidenti | parallele | coincidenti |
| hanno un solo punto in comune | non hanno punti in comune | hanno infiniti punti in comune |

In particolare, due rette incidenti sono **ortogonali** (o **perpendicolari**, o **normali**) quando dividono il piano in quattro parti uguali fra loro.



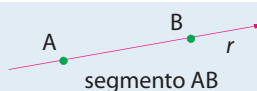
Tre o più punti appartenenti alla stessa retta si dicono **allineati**.

Ogni punto O di una retta orientata r individua sulla retta due **semirette**, una formata da O e dai punti della retta che precedono O e l'altra formata da O e dai punti della retta che seguono O . Il punto O viene detto **origine** delle due semirette, dette anche semirette opposte.



► La retta su cui giace una semiretta o un segmento è detta **retta sostegno** della semiretta o del segmento.

Due punti A e B di una retta orientata r individuano un **segmento**, formato dai punti della retta compresi fra A e B , detti **punti interni** del segmento, e dai punti A e B , detti **estremi**.



8 Altre discipline

UNITÀ 2

Conoscenze
acquisite negli studi

Accanto agli argomenti di conoscenze acquisite negli studi trattati nei precedenti capitoli, i test di ammissione ai diplomi universitari dell'area medico-sanitaria hanno talvolta in passato presentato domande inerenti altre materie, come storia dell'arte e attualità oppure storia delle scienze. Presentiamo di seguito alcuni esempi di queste tipologie.

Attualità e Arte

■ **Come viene comunemente chiamata l'affezione psicosomatica che provoca tachicardia, capogiri, vertigini, confusione e allucinazioni in soggetti messi al cospetto di opere d'arte di straordinaria bellezza?**

- A** Sindrome di West
- B** Sindrome di Stoccolma
- C** Sindrome di Stendhal
- D** Sindrome di Arts
- E** Sindrome di Down

La definizione presentata dal testo dell'esercizio è infatti quella della Sindrome di Stendhal, che prende il nome dallo scrittore francese del XIX secolo (risposta esatta **C**), milanese d'elezione e autore del romanzo "Il rosso e il nero" (1830), che la descrisse per la prima volta durante il suo Gran Tour italiano del 1817, quando uscendo da una visita a Santa Croce si scoprì emozionato al punto da temere di cadere. Ricordiamo che la Sindrome di Stoccolma è invece un particolare stato di dipendenza psicologica che manifestano alcune vittime di violenza (fisica o psicologica) nei confronti dei propri aggressori. La Sindrome di West è una rara forma di epilessia, quella di Arts un raro disordine metabolico che causa gravi problemi neurologici e, infine, quella di Down, un disturbo cromosomico dovuto alla presenza supplementare di un cromosoma 21.

■ **Chi è il creatore della serie di fumetti Corto Maltese?**

- A** H. Pratt
- B** T. Sclavi
- C** F.T. Altan
- D** L. Ortolani
- E** B. Jacovitti

L'artista veneziano Hugo Pratt (1927-1995) creò Corto Maltese nel 1967. La sua prima avventura (su 33 complessive) è diventata un classico del fumetto internazionale ed è *Una ballata del mare salato*. Risposta esatta **A**. A Tiziano Sclavi si deve la creazione di Dylan Dog, a Benito Jacovitti quella di Cocco Bill, a Francesco Tullio Altan Cipputi! e infine a Leo Ortolani Rat-Man.

■ **Nel febbraio 2021 si è conclusa con successo la prima missione spaziale di un Paese arabo. Quale tra i seguenti l'ha ideata e portata a termine?**

- A** Arabia Saudita
- B** Yemen
- C** Emirati Arabi Uniti
- D** Qatar
- E** Oman

Nel febbraio 2021, dopo sette mesi di viaggio, la sonda interspaziale Hope, nota anche come al-Amal, ha raggiunto Marte e inviato sulla Terra le prime immagini e i primi dati. Rimarrà nell'orbita del pianeta rosso per un intero periodo orbitale (687 giorni) Si tratta di una missione senza equipaggio dell'Emirate Mars Mission (EMM), organizzata appunto da un team di 200 ingegneri (il 34% donne) degli Emirati Arabi Uniti. La risposta esatta è la **C**.

■ **"Orrore senza fine nella British Columbia xxx dove accurate ricerche, richieste dalla locale comunità indigena ed eseguite utilizzando un radar, hanno svelato diciassette nuove fosse comuni nei pressi dell'ex scuola cattolica Marieval Indian Residential, gestita dalle suore della congregazione di Saint Joseph of Saint-Hyacinthe dal 1898 al 1997. Quasi certamente piene di corpi di bambini nativi: almeno 751, secondo un primo sommario calcolo". Quale termine completa correttamente la notizia apparsa sulla stampa nazionale a fine febbraio 2023?**

- 9** I personaggi di Polifemo e Golia, entrambi di importante stazza fisica, sono legati rispettivamente all'epica omerica e alle vicende bibliche, non alla storia romana. Tra i tre militari e politici romani va scelto Marc'Antonio, che Cicerone descrive come alto, robusto e imponente e che in senso figurato ha continuato per secoli a indicare qualcuno di fisicamente grande e grosso. La risposta esatta è la **D**. ☒ Unità 2, Lezione 4
-
- 10** La risposta esatta è la **C**. Al 2002 data infatti la SARS, epidemia che si diffuse in Cina e in altri 28 Paesi provocando circa 8000 vittime nell'arco di un anno e mezzo. L'acronimo, tradotto dall'inglese, indica una Sindrome respiratoria acuta grave. ☒ Unità 2, Lezione 5
-
- 11** Lo *ius soli* è applicato in diversi Paesi, tra cui gli Stati Uniti d'America, ma non l'Italia (dove comunque se ne è chiesta l'introduzione da parte di alcune forze politiche), e prevede che chi nasce nel territorio di un Paese ne acquisisce subito la cittadinanza, indipendentemente da quella dei genitori (risposta esatta **D**). Tra gli Stati della Ue lo *ius soli* c'è in Francia, Germania e Irlanda. ☒ Unità 2, Lezione 5
-
- 12** La risposta esatta è la **B**. Ippocrate, medico ma anche geografo vissuto tra il 460 e il 370 a.C. circa, è considerato il fondatore della medicina scientifica in Grecia. Lasciò un Corpus di circa 70 opere. Sostenne la "teoria degli umori" e studiò anatomia e patologia dissezionando cadaveri. Il giuramento a lui attribuito è ancora oggi prestato dai medici-chirurghi e dagli odontoiatri che iniziano la professione medica. ☒ Unità 2, Lezione 4