

7 Sistemi lineari

Equazioni in due incognite e sistemi di equazioni

Si consideri un'equazione del tipo $ax + by = c$, ossia un'equazione di primo grado *in due incognite*, per esempio $2x + y = 0$: se si assegna all'incognita x un valore arbitrario (per esempio 1) si ottiene una equazione *nella sola incognita* y . Risolvendola, si trova un valore numerico per l'incognita y (ossia -2) che, **insieme al valore arbitrario assegnato alla x** , costituisce una soluzione dell'equazione di partenza. Il procedimento può essere ripetuto all'infinito, assegnando via via valori arbitrari alla x e trovando, per ognuno di questi, il corrispondente valore per la y : ciascuna delle coppie di valori così trovate costituisce una diversa soluzione dell'equazione. Questo ragionamento vale per qualsiasi equazione in due incognite.



Mappa
Sistemi lineari

Un'equazione in due (o più) incognite ammette in generale **infinite soluzioni**, ciascuna delle quali è rappresentata da una coppia di valori (uno per la x e uno per la y).



$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ sono due delle infinite soluzioni dell'equazione $2x + y = 0$



Si considerino ora due equazioni nelle stesse due incognite, per esempio $2x + y = 0$ e $x - y = 0$: ci poniamo il problema di trovare (se esiste) una soluzione *comune* alle due equazioni, ossia una coppia di valori che verifichi entrambe le equazioni.

L'insieme di due (o più) equazioni (nelle stesse incognite) delle quali si voglia trovare una soluzione comune **prende il nome di sistema di equazioni**.

■ Soluzione di un sistema

Risolvere un sistema significa trovare la soluzione comune alle due (o più) infinite di soluzioni delle singole equazioni che compongono il sistema.

L'insieme delle coppie di valori numerici che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni costituenti il sistema prende il nome di **soluzione** del sistema.

La soluzione di un sistema è dunque contemporaneamente soluzione di ogni equazione costituente il sistema. Si tratta quindi di trovare l'intersezione fra gli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

■ Grado di un sistema

Il grado di un sistema è il **prodotto dei gradi delle equazioni** che lo costituiscono.

$\begin{cases} 3x + y = 1 & 1^\circ \text{ grado} \\ 2xy + x = 0 & 2^\circ \text{ grado} \end{cases} \rightarrow$ è un sistema di 2° grado



I sistemi di primo grado vengono detti anche **sistemi lineari**.

$\begin{cases} x - 2y = 0 & 1^\circ \text{ grado} \\ 3x + 2y = 8 & 1^\circ \text{ grado} \end{cases} \rightarrow$ è un sistema di 1° grado, ossia lineare



Permutazioni

■ Permutazioni semplici

Le **permutazioni** sono disposizioni di n oggetti a n a n , quindi **differiscono** l'una dall'altra **solo per l'ordine** degli oggetti.

Per calcolare il numero di permutazioni semplici di n oggetti si utilizza la seguente formula:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Per stabilire in quanti modi diversi possono sedersi quattro persone su una panca avente quattro posti basta stabilire quanti sono i gruppi distinti di quattro elementi che si possono ottenere con quattro elementi diversi, in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per l'ordine degli oggetti che lo compongono. Si tratta quindi delle permutazioni semplici di 4 oggetti (le quattro persone):

$$P_4 = D_{4,4} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$



■ Permutazioni con ripetizione

Le **permutazioni con ripetizione** sono disposizioni di n oggetti a n a n , di cui k uguali tra loro.

Per calcolare il numero di permutazioni di n oggetti di cui k uguali si utilizza la seguente formula:

$$P_{n,k}^{rip} = \frac{n!}{k!}$$

Per stabilire quanti anagrammi si ottengono con le lettere della parola CANNONE, ovvero quante parole di sette lettere (anche senza senso) si possono formare con sette lettere, tre delle quali uguali, basta stabilire quanti sono i gruppi di sette lettere che si possono formare con sette lettere, tre delle quali uguali, in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per l'ordine degli oggetti che lo compongono. Si tratta quindi delle permutazioni con ripetizione di 7 oggetti (le sette lettere considerate), 3 dei quali uguali:

$$P_{7,3}^{rip} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$



Combinazioni

■ Combinazioni semplici

Con **combinazioni** di n oggetti a k a k ($C_{n,k}$), si definisce il numero di modi in cui è possibile disporre n oggetti presi k alla volta (a a k) ove ciascuna combinazione differisce dalle altre **solo per gli oggetti** e non per il loro ordine.

I gruppi $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 1\}$ rappresentano due disposizioni, ma una sola combinazione, mentre i gruppi $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 3, 6\}$ rappresentano due disposizioni e due combinazioni.

Quattro persone che si siedono nei quattro posti a disposizione intorno a un tavolo costituiscono, comunque si dispongano, sempre **una sola** combinazione.



Per calcolare il numero di combinazioni semplici di n oggetti presi k alla volta si utilizza la formula:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Per stabilire quante strette di mano avvengono in un gruppo di sei persone se ogni persona stringe la mano a tutte le altre basta stabilire quanti sono i gruppi di due elementi che si possono formare con sei elementi dati, in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per gli oggetti che lo compongono. Si tratta quindi delle combinazioni semplici di 6 oggetti presi a 2 a 2:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2} = 3 \cdot 5 = 15$$



Quesiti commentati

Vuoi metterti alla prova con 5 quesiti facili? Inquadra il QRcode a fianco. Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



1 Il M.C.D. e il m.c.m. fra $8ab^2$, $3a$, $2abc$ sono rispettivamente:

- A $3c, 2abc$
- B $a, 24ab^2c$
- C $2abc, 48a^3b^3c$
- D $8a, 24a$
- E $3a, 8ab^3c$

2 Il polinomio $5a^2b^2 - \frac{1}{5}a^4 + 3 + 2b^4$:

- A è omogeneo
- B ha un termine che è un monomio fratto
- C è di 4° grado
- D è la somma di due quadrati
- E nessuna delle altre risposte è corretta

3 Il polinomio $x^2(x^2 + 15) - 8x^3$ è equivalente a:

- A $x^2[x(x-8) + 15]$
- B $-x^2(x-3) \cdot (x+5)$
- C $x^2(x+15-8x^3)$
- D $x^2(x-5) \cdot (x+3)$
- E $x^2(x^2+7)$

4 L'espressione $(a^2 + b^2)^2$ è uguale a:

- A $(a^2 + b^2) - (2ab)^2$
- B $(a+b)^3 \cdot (a-b)$
- C $(a-b)^3 \cdot (a+b)$
- D $[(a-b)^2 + 2ab]^2$
- E $(a^2 + b^2) + 2ab$

5 Il quadrato del trinomio $(a - b - c)$ è uguale a:

- A $(a + b + c) \cdot (a - b - c)$
- B $a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- C $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$
- D $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$
- E $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

6 Indicare quante coppie ordinate $(m; n)$ di interi positivi m e n verificano la condizione:

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 64$$

- A Nessuna
- B Cinque
- C Sei
- D Dieci
- E Infinite

7 Qual è il resto della seguente divisione?

$$(x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 1) : (x - 2)$$

- A -1
- B 11
- C -17
- D -11
- E 0

8 La scomposizione in fattori del polinomio

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 \text{ è:}$$

- A $(x-1) \cdot (x^3-2)$
- B $(x-1) \cdot (x-2)^3$
- C $(x-1)^2 \cdot (x+1)$
- D $(x-1)^2 \cdot (x-2)^2$
- E $(x-1) \cdot (x^3+2)$

9 Il numero $\frac{49^{40}-1}{7^{40}-1}$ è uguale a:

- A $42^{40} - 1$
- B $49^{20} + 1$
- C $7^{40} - 1$
- D 7^{40}
- E 42^{40}

10 L'espressione algebrica $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$ è uguale a:

- A $\frac{x-3}{2x+1}$
- B $\frac{3-x}{2x^2+x}$
- C $\frac{x+3}{2x^2+x}$
- D $\frac{x-3}{x-2x^2}$

E numeratore e denominatore non hanno fattori comuni, quindi l'espressione non è semplificabile

11 Semplificare la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 2x^2}$$

- A $x+1$
- B $\frac{x-1}{x(x+1)}$
- C $\frac{x+1}{x}$
- D $\frac{-1}{x^3 + x + 2x^2}$
- E $\frac{x}{x(x+1)}$

12 Quale delle espressioni sotto elencate è uguale alla seguente espressione algebrica?

$$\frac{a^2 - b^2}{a(a+b)}$$

- A $1 - b/a$
- B $(a+b)/a$
- C $-b$
- D $(a-b^2)/(a+b)$
- E Nessuna delle altre risposte è corretta

Sintesi

Equazioni di secondo grado

- ▶ Si chiamano anche equazioni quadratiche e sono equivalenti alla seguente forma generale:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Il segno del binomio $b^2 - 4ac$ (indicato con la lettera greca Δ e detto **discriminante**) influenza la realtà delle soluzioni che risultano uguali a:

- ▶ **formula risolutiva generale**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- ▶ formula risolutiva ridotta (valida se b è pari)

$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$$

pertanto si conclude che:

- ▶ se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni reali distinte;
- ▶ se $\Delta = 0$ l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti;
- ▶ se $\Delta < 0$ l'equazione **non** ha alcuna soluzione reale.

Sistemi di equazioni di secondo grado

- ▶ Sono sistemi formati da una equazione di secondo grado e una o più equazioni di primo grado.
- ▶ Il metodo risolutivo più conveniente da utilizzare è quello della sostituzione.

Equazioni di grado superiore al secondo

- ▶ Per risolvere un'equazione **di grado superiore al secondo** si può provare, dopo averla ridotta a forma normale, a scomporre il polinomio a primo membro in fattori di primo e secondo grado, per poi applicare la proprietà di annullamento del prodotto.

- ▶ Equazioni biquadratiche:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

- ▶ Si risolvono ponendo $t = x^2$

- ▶ Equazioni binomie:

$$ax^n + b = 0$$

- ▶ Si risolvono ponendo $x^n = -\frac{b}{a}$

- ▶ Equazioni trinomie:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

- ▶ Si risolvono ponendo $t = x^n$

Sintesi

Logaritmi

- Il $\log_a b$ è, per definizione, l'esponente da attribuire alla base a per ottenere l'argomento b :

$$x = \log_a b \leftrightarrow \text{se e solo se } a^x = b$$

sotto le condizioni $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Segno del logaritmo

- Un logaritmo è **positivo** quando la base e l'argomento sono:

► entrambi maggiori di 1:
$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b > 0$$

oppure:

► compresi tra 0 e 1:
$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b > 0$$

- Un logaritmo è **negativo** quando:

- la base è maggiore di 1 e l'argomento è compreso tra 0 e 1:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b < 0$$

oppure:

- la base è compresa tra 0 e 1 e l'argomento è maggiore di 1:

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases} \rightarrow \log_a b < 0$$

Teoremi sui logaritmi

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$:

► $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

► $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

► $\log_a(b)^n = n \cdot \log_a b$

► $\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$

► $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

► $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

Logaritmi fondamentali

- Logaritmi decimali (Log): sono logaritmi in base 10.

- Logaritmi naturali o neperiani (ln): sono logaritmi in base $e = 2,71828\dots$ = numero di Eulero.

Formula del cambiamento di base

Se $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$:

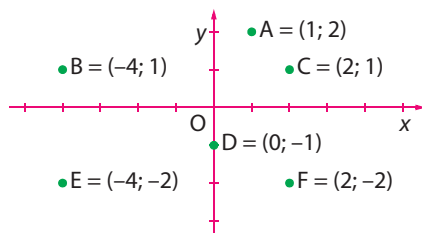
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

da cui:

$$\text{Log } b = \frac{\ln b}{\ln 10}$$

$$\ln b = \frac{\text{Log } b}{\text{Log } e}$$

Nel piano cartesiano seguente sono riportati alcuni punti con le corrispondenti coordinate cartesiane.

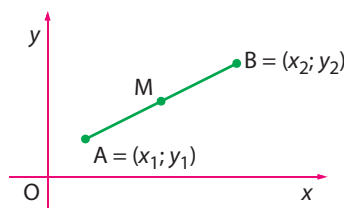


■ Distanza tra due punti e coordinate del loro punto medio

Dati due punti A e B, di coordinate $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ rispettivamente, valgono le seguenti relazioni per calcolare la loro distanza \overline{AB} e le coordinate del loro punto medio M, ossia il punto medio del segmento avente A e B come estremi.

$$\overline{AB} = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{se } x_1 = x_2 \\ |x_2 - x_1| & \text{se } y_1 = y_2 \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} & \text{in generale} \end{cases}$$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



La distanza tra i due punti $A = (-3; -1)$ e $B = (3; 7)$ e le coordinate del loro punto medio sono, rispettivamente:



- A** $\overline{AB} = 5; M = (1; 2)$
- B** $\overline{AB} = \sqrt{2}; M = (1; -2)$
- C** $\overline{AB} = 10; M = (0; 3)$
- D** $\overline{AB} = 3; M = (-2; 5)$
- E** nessuna delle altre risposte è corretta

Utilizzando le formule appena viste otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[3 - (-3)]^2 + [7 - (-1)]^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

e

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \rightarrow M = \left(\frac{-3 + 3}{2}; \frac{-1 + 7}{2} \right) \rightarrow M = (0; 3)$$



Mappa
Riferimento
cartesiano

La risposta corretta è la **C**.

■ Baricentro di un triangolo

Dato il triangolo di vertici:

$$A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B) \text{ e } C = (x_C; y_C)$$

le coordinate del baricentro G sono:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Soluzioni e commenti

1 L'operazione da fare è:

$$\frac{1 \text{ dm}^2}{1 \text{ mm}^2} - \frac{1 \text{ m}^3}{1 \text{ dm}^3}$$

Riportando per chiarezza tutte le unità a multipli del metro quadro e del metro cubo, l'operazione si riduce a:

$$\frac{10^{-2} \text{ m}^2}{10^{-6} \text{ m}^2} - \frac{1 \text{ m}^3}{10^{-3} \text{ m}^3} = 10^4 - 10^3 = 9000 \quad (\text{risposta D})$$

► Unità 1, Lezione 1

2 La risposta esatta è la **E**. In tutti gli elenchi c'è sempre almeno un'inversione che "rovin" l'ordine crescente: nell'alternativa **A**, h (che sta per 10^2) dovrebbe venire prima di k (10^3); nella **B**, c (10^{-2}) dovrebbe venire prima di da (10^1); nella **C**, M (10^6) dovrebbe venire prima di T (10^{12}); infine, nella **D**, p (10^{-12}) dovrebbe venire prima di d.

► Unità 1, Lezione 1

3 Visualizzando correttamente il problema secondo la minuziosa descrizione dell'esperimento di Perrin, esso si riduce a un esercizio di geometria solida: la chiazza circolare di acido oleico è assimilabile a un cilindro che ha diametro di base d pari a 28 cm e un'altezza che è lo spessore h dello strato che si chiede di trovare.

Conoscendo il volume V del cilindro non resta che fare una divisione.

$$h = \frac{V}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{10^{-4} \text{ cm}^3}{3,14 \cdot \left(\frac{28 \text{ cm}}{2}\right)^2} = \frac{10^{-4}}{3,14 \cdot 14^2} \text{ cm}$$

L'unica difficoltà del problema sta nell'eseguire la divisione senza l'aiuto di una calcolatrice, ma si può proseguire il calcolo con qualche approssimazione:

$$\frac{10^{-4}}{3,14 \cdot 14^2} \cong \frac{10^{-4}}{3 \cdot (2 \cdot 7)^2} = \frac{10^{-4}}{3 \cdot 4 \cdot 49} \cong \frac{10^{-4}}{3 \cdot 4 \cdot 50} = \frac{10^{-4}}{600} = \frac{10^{-4}}{6 \cdot 10^2} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$$

Giunti a questo punto del calcolo, anche senza sapere quanto fa esattamente 1 diviso 6, si possono escludere tutte le alternative tranne la prima, sulla base degli ordini di grandezza e delle unità di misura. Dato che $1/6$ è compreso tra $1/8 = 0,125 = 1,25 \cdot 10^{-1}$ e $1/5 = 0,2 = 2 \cdot 10^{-1}$, si conclude che la risposta esatta è la **A**.

► Unità 1, Lezione 1

4 Per sommare le due masse dobbiamo renderle omogenee nelle unità di misura. Eseguiamo le equivalenze nel SI: $800 \text{ g} = 0,8 \text{ kg}$ di zucchero, si somma a $2,1 \text{ kg}$ di farina, per una massa complessiva di $2,9 \text{ kg}$. La risposta esatta è la **E**.

► Unità 1, Lezione 1

5 Il caso in cui il risultato della somma di vettori ha modulo massimo è quello in cui essi sono complanari, paralleli e con lo stesso verso. In questa situazione, come si è visto, si può eseguire la somma algebrica dei moduli e il valore ottenuto è il modulo della risultante.

Con due vettori di modulo 3 e 5, rispettivamente, il modulo massimo della somma è dunque 8. Si può quindi escludere il valore 9 indicato nell'alternativa **E**.

► Unità 1, Lezione 2

6 Secondo la regola del parallelogramma, la somma vettoriale (o *risultante*) di due vettori **a** e **b** è la diagonale del parallelogramma che ha per lati **a** e **b**. La risultante **a + b** è rappresentata nel diagramma 3.

Utilizzando sempre la regola del parallelogramma, si definisce differenza tra **a** e **b**:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Dunque il calcolo della differenza di due vettori si riduce al calcolo della somma di un vettore con l'opposto dell'altro. Graficamente, il vettore opposto è lo stesso vettore cambiato di verso. Si conclude che lo schema corretto per la differenza **a - b** è l'1: la risposta esatta è la **A**.

► Unità 1, Lezione 2

7 Sono definiti due tipi di prodotto tra vettori: il *prodotto scalare*, che fornisce come risultato uno scalare, e il *prodotto vettoriale*, che fornisce invece come risultato un vettore. La risposta esatta è dunque la **B**.

► Unità 1, Lezione 2

- 8** La risposta esatta è la **A**. Secondo le definizioni di prodotto scalare e vettoriale tra due vettori, e ricordando che $\cos(60^\circ) = 1/2$ e $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$, si ha infatti: ► Unità 1, Lezione 2

$$c = a \cdot b \cdot \cos(60^\circ) = 25; \quad d = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = a \cdot b \cdot \sin(60^\circ) = 25\sqrt{3}$$

- 9** Per calcolare il prodotto scalare di due vettori espressi in coordinate cartesiane $\mathbf{A} = (x_A; y_A) = (3; 4)$ e $\mathbf{B} = (x_B; y_B) = (5; 2)$ si usa la formula: ► Unità 1, Lezione 2

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$$

Il prodotto scalare è infatti la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei vettori. Sostituendo i valori si ottiene:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23$$

La risposta corretta è la **D**.


- 10** Per calcolare la somma vettoriale di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} espressi in coordinate cartesiane occorre sommare i vettori componente per componente, facendo attenzione ai segni:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B) = (3 + (-1); -2 + 4; 5 + (-2)) = (2; 2; 3)$$

La risposta corretta è quindi la **A**.

- 11** Per ricavare le dimensioni dell'errore assoluto di una misura si utilizza la definizione. Supponendo che la misura del circuito sia per esempio la media di una serie di misure, e ricordando che dividere per un numero non cambia le dimensioni: ► Unità 1, Lezione 3

$$\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \rightarrow [\varepsilon] = [x_{max} - x_{min}] = [x] = [L]$$

L'errore assoluto ha sempre le dimensioni della misura a cui è associato. 

L'errore relativo è definito come $\varepsilon_r = \varepsilon/X$, dove X è la misura. Essendo il rapporto di due grandezze con le stesse dimensioni, ε_r è una grandezza adimensionale. In questo caso:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{X} \rightarrow [\varepsilon_r] = \frac{[L]}{[L]} = 1$$

La risposta corretta è pertanto la **D**.

- 12** Quando la misura di una grandezza è indicata nella forma $(M \pm \varepsilon)$, M rappresenta il valore medio di più misure, mentre ε indica l'errore assoluto associato a M . Si definiscono errore relativo ε_r ed errore percentuale $\varepsilon_{\%}$ le due quantità: ► Unità 1, Lezione 3

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{M} \quad \varepsilon_{\%} = \frac{\varepsilon}{M} \cdot 100\%$$

Sostituendo i valori, si ottiene:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{0,5 \text{ mg}}{20 \text{ mg}} \cdot 100\% = 2,5\%$$

La risposta esatta è la **B**.

Vuoi metterti alla prova con 5 domande difficili sugli argomenti di questa Unità? Inquadra il QRcode a fianco. Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



Quesiti commentati

Vuoi metterti alla prova con 5 quesiti facili? Inquadra il QRcode a fianco. Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



1 L'intensità di corrente elettrica in un filo conduttore:

- A** è il numero di cariche che attraversa una sezione del conduttore nell'unità di tempo
- B** dipende dalla differenza di potenziale agli estremi del filo
- C** è il numero di elettroni che circola nel conduttore in un secondo
- D** si misura in volt/secondo
- E** si misura in coulomb · secondo

2 Un conduttore è percorso da una corrente $i = 800$ mA. In un tempo pari a due secondi la sezione del conduttore viene attraversata da (carica dell'elettrone $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C):

- A** 4×10^{20} elettroni
- B** 10^{-19} elettroni
- C** 2×10^{22} elettroni
- D** 10^{19} elettroni
- E** 2×10^{16} elettroni

3 Una lampada a incandescenza da 120 watt e uno scaldabagno elettrico da 1.500 watt sono alimentati dalla stessa tensione. Segue che:

- A** le resistenze elettriche dei due apparecchi sono le stesse
- B** è più elevata la resistenza dello scaldabagno elettrico
- C** è più elevata la resistenza della lampada a incandescenza
- D** non si può rispondere senza conoscere le correnti
- E** tutte le precedenti risposte sono errate

4 La differenza di potenziale elettrico ai capi di una lampadina è costante e pari a 100 V. Per un periodo di tempo pari a 1000 s la lampadina assorbe una potenza elettrica di 160 W. Sapendo che la carica dell'elettrone è $1,60 \cdot 10^{-19}$ C, quanti elettroni si può ritenere abbiano attraversato una sezione trasversale del filo che alimenta la lampadina nell'intervallo di tempo considerato?

- A** $6,02 \cdot 10^{23}$
- B** $1,60 \cdot 10^{23}$
- C** 10^{23}
- D** 10^{22}
- E** 10^{-16}

5 L'unità di misura della resistività è:

- A** Ω/m^2
- B** $\Omega \cdot m^2$
- C** Ω/m
- D** $\Omega \cdot m$
- E** Ω/m^3

6 Tre lampadine di resistenza elettrica $R_1 < R_2 < R_3$ vengono alimentate in parallelo dalla stessa linea elettrica. Qual è la relazione tra le potenze dissipate dalle tre lampadine?

- A** $P_1 < P_2$ e $P_2 > P_3$
- B** $P_1 = P_2 = P_3$
- C** $P_1 > P_3$ e $P_2 < P_3$
- D** $P_1 > P_2 > P_3$
- E** $P_1 < P_2 < P_3$

7 Siano date 3 resistenze elettriche, ohmiche, una da 10 Ω , una da 20 Ω e una da 30 Ω . Siano poste in parallelo. La resistenza equivalente vale:

- A** meno di 10 Ω
- B** 10 Ω
- C** 20 Ω
- D** 30 Ω
- E** più di 30 Ω

8 Si hanno 4 pile, ciascuna è da 1,5 V. Le si collegano in serie (collegando il polo + della prima al - della seconda, il + della seconda al - della terza e, infine, il + della terza al - della quarta). Quanto vale la differenza di potenziale d.d.p. (in valore assoluto) tra il polo - della prima e il polo + della quarta, a circuito aperto?

- A** Si crea un immediato cortocircuito, per cui immediatamente si ha 0 V
- B** Si annullano le cariche, quindi non succede nulla, ma si ottiene comunque 0 V
- C** Si ottiene una d.d.p. da 1,5 V, ma di maggiore durata
- D** Si ottiene una d.d.p. da 1,5 V di minor durata, ma più precisa e più stabile
- E** Si ottiene una d.d.p. di 6 V

3 La tavola periodica degli elementi

UNITÀ 1

Il linguaggio della chimica

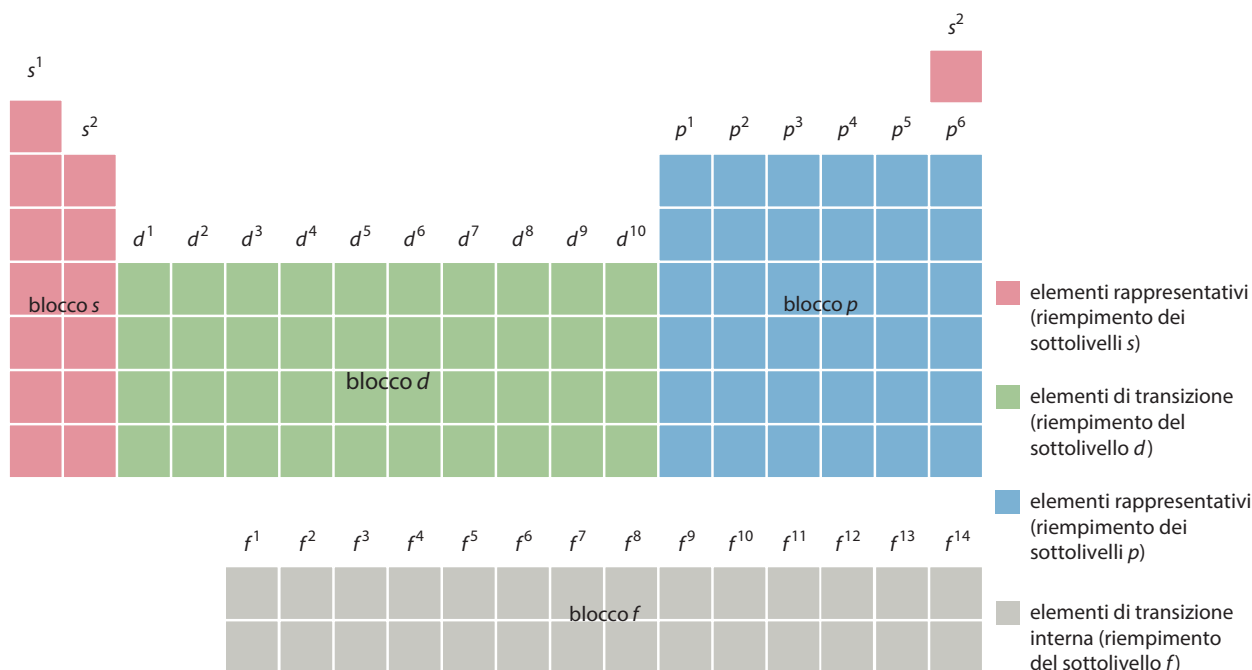
Ogni elemento chimico è individuato tramite un nome e un simbolo costituito da una o due lettere (generalmente ricavate dal nome inglese o latino), di cui la prima sempre maiuscola e la seconda sempre minuscola.

Principio di costruzione della tavola periodica

Nella tavola periodica (riportata al termine della parte di chimica) gli elementi sono ordinati per riga, da sinistra verso destra, con numero atomico crescente, andando a capo quando inizia il riempimento di un nuovo livello energetico. Ogni riga è detta **periodo** e corrisponde al riempimento degli orbitali di un livello. Ogni colonna è detta **gruppo**. Gli elementi di uno stesso gruppo hanno la stessa configurazione elettronica esterna, ovvero lo stesso numero di elettroni nel livello energetico esterno: questo viene definito **livello**, o **guscio di valenza**, e gli elettroni che vi risiedono sono detti **elettroni di valenza**.

I periodi sono 7 (corrispondenti ai sette livelli energetici) e sono indicati con numeri arabi. I gruppi sono stati tradizionalmente indicati con numeri romani e con la lettera A o B, successivamente la IUPAC¹ ha proposto una numerazione dei gruppi basata su un numero progressivo da 1 a 18. Gli elementi dei gruppi A, che corrispondono ai gruppi 1, 2, 13, 14, 15, 16, 17 e 18, sono chiamati *elementi rappresentativi* e hanno gli elettroni più esterni negli orbitali *s* o *p*. Gli elementi dei gruppi B (dal 3 al 10) sono detti *elementi di transizione* e hanno il sottolivello *d* parzialmente riempito. Nel sesto e nel settimo periodo sono inserite due file di elementi chiamati *elementi di transizione interna* (lantanidi e attinidi), caratterizzati dal sottolivello *f* parzialmente riempito.

La tavola periodica può essere suddivisa anche in blocchi:



¹ L'International Union for Pure and Applied Chemistry è un'organizzazione non governativa internazionale dedicata al progresso della chimica, costituita nel 1919 a Londra e con sede centrale a Zurigo.

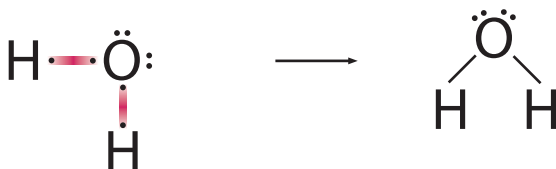
■ Doppie di legame e doppietti solitari

La coppia di elettroni condivisa prende il nome di *coppia* o *doppietto di legame*, mentre gli altri elettroni di valenza che non partecipano al legame vengono considerati anch'essi a coppie e chiamati *doppie solitari*.

Costruiamo la molecola dell'acqua, H₂O



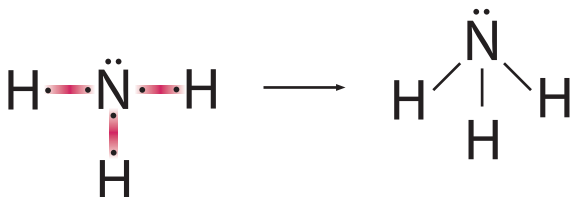
- L'atomo di O ha 6 elettroni di valenza e necessita di altri 2 elettroni per raggiungere l'ottetto,
- l'atomo di H possiede un elettrone e necessita di un altro elettrone per raggiungere la configurazione elettronica stabile 1s².
- Combinandosi nella molecola dell'acqua, H₂O, sia l'atomo di ossigeno sia i due atomi di idrogeno raggiungono la stabilità elettronica.



Costruiamo la molecola dell'ammoniaca, NH₃



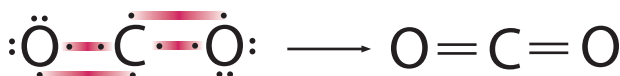
- L'atomo di N ha 5 elettroni di valenza e necessita di altri 3 elettroni per raggiungere l'ottetto,
- l'atomo di H possiede un elettrone e necessita di un altro elettrone per raggiungere la configurazione elettronica stabile 1s².
- Combinandosi nella molecola dell'ammoniaca, NH₃, sia l'atomo di azoto sia i tre atomi di idrogeno raggiungono la stabilità elettronica.



Costruiamo la molecola dell'anidride carbonica, CO₂



- L'atomo di O ha 6 elettroni di valenza e necessita di altri 2 elettroni per raggiungere l'ottetto,
- l'atomo di C possiede 4 elettroni (2s² 2p²) e necessita di altri 4 elettroni per raggiungere la configurazione elettronica stabile 2s² 2p⁶.
- Combinandosi nella molecola dell'anidride carbonica, CO₂, sia l'atomo di carbonio sia i due atomi di ossigeno raggiungono la stabilità elettronica.



Orbitali molecolari, legame σ e legame π

Quando si forma un legame covalente, due orbitali atomici si sovrappongono e si fondono formando un *orbitale molecolare*, di energia e forma diversa rispetto agli orbitali di partenza.

Un orbitale molecolare è la regione di spazio occupata da una coppia di elettroni di legame che circonda entrambi i nuclei dei due atomi legati.

La forma dell'orbitale molecolare dipende dal tipo di orbitali atomici di partenza e dalla loro modalità di sovrapposizione:

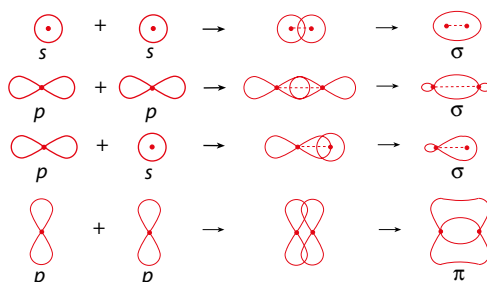
- se la sovrapposizione è *frontale* (testa/testa) si forma un legame covalente σ , formato da un orbitale che circonda da ogni parte l'asse che congiunge i due nuclei;
- se la sovrapposizione è *laterale* (fianco/fianco) si forma un *legame covalente π* , formato da un orbitale a due lobi giacente su un piano che contiene la congiungente i due nuclei.

Il legame π si forma solo per sovrapposizione laterale di orbitali p .

A causa della maggiore sovrapposizione degli orbitali, il legame σ è più forte del legame π .



Videorisoluzione
Legame π



Un legame covalente semplice è sempre di tipo σ .

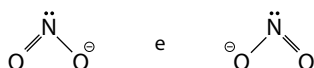
Il legame doppio è formato da un legame σ e un legame π .

Il legame triplo è formato da un legame σ e due legami π .



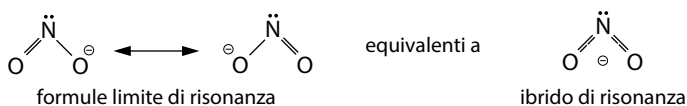
Risonanza e delocalizzazione elettronica

Per alcune molecole è possibile scrivere più di una formula di struttura; per esempio, per lo ione nitrito (NO_2^-) è possibile scrivere due formule di struttura:



Nessuna delle due formule rappresenta però la struttura reale della molecola: un doppio legame infatti in genere è più corto di un legame semplice, eppure si è osservato sperimentalmente che in NO_2^- i due legami hanno uguale lunghezza.

Le diverse formule possibili sono chiamate **forme limite di risonanza** (o forme mesomere) e si separano con una freccia a due punte; la sostanza reale ha una struttura intermedia tra quella delle forme limite ed è chiamata **ibrido di risonanza**. Per **energia di risonanza** si intende la differenza di energia tra l'ibrido di risonanza (la molecola reale) e la forma limite più stabile.



La risonanza è dovuta al fatto che gli elettroni del legame π , anziché essere condivisi, nel caso di NO_2^- , solo dall'atomo di N e da uno degli atomi di O, sono delocalizzati su tutta la molecola: forma cioè un **orbitale molecolare π delocalizzato**, esteso a tutti e tre gli atomi.

Un altro esempio di risonanza è rappresentato dal benzene (► Unità 8, Lezione 24).

Sintesi

Classificazione dei legami chimici



Orbitali ibridi

| Ibridazione | Angolo di legame | Forma della molecola |
|-------------|------------------|----------------------|
| sp^3 | 109,5° | tetraedrica |
| sp^2 | 120° | trigonale planare |
| sp | 180° | lineare |

Caratteristiche dei legami forti

| Legame covalente | Legame ionico | Legame metallico |
|--|--|---|
| Si stabilisce tra non metalli | Si stabilisce tra metalli e non metalli | Si stabilisce tra metalli |
| Condivisione di elettroni (sovrapposizione degli orbitali) → formazione di orbitali molecolari | Trasferimento di elettroni dal metallo al non metallo → formazione di ioni | Espulsione degli elettroni di valenza → condivisione degli elettroni in un orbitale esteso a tutta la massa del metallo |
| Legame direzionale legame σ (sovrapp. frontale) legame π (sovrapp. laterale) | Legame adirezionale | Legame adirezionale |
| Formazione di molecole | Formazione di reticoli cristallini ionici (solidi a T ambiente) | Formazione di reticoli cristallini metallici (solidi a T ambiente, eccetto Hg) |
| Sostanze rappresentate da formule molecolari | Sostanze rappresentate da formule minime | Sostanze rappresentate dai simboli degli elementi (metalli) |
| Puro – Polare – Dativo Ibridazione/Polarità/Risonanza | Natura elettrostatica | Malleabilità / Duttilità / Conduttività elettrica e termica |

presenti tre legami covalenti in cui i tre elettroni solitari sono condivisi con quelli di tre atomi di idrogeno. Nello ione ammonio i due elettroni presenti nel quarto orbitale sono utilizzati per formare un legame dativo, cioè un legame di tipo covalente in cui un atomo che dispone di un doppietto solitario, in questo caso l'azoto, lo condivide con una specie chimica che ha un orbitale vuoto, in questo caso lo ione idrogeno, H^+ . La risposta esatta è quindi la **A**.

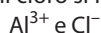
- 8** Il legame ionico è un'attrazione di tipo elettrostatico fra due ioni di carica opposta; si forma tra due atomi con elevata differenza di elettronegatività ($> 1,7$) in seguito al trasferimento di uno o più elettroni di valenza dall'atomo meno elettronegativo a quello più elettronegativo. Dato che l'elettronegatività aumenta lungo i periodi della tavola periodica, andando da sinistra a destra, gli elementi a più bassa elettronegatività sono i metalli, posti nella parte sinistra della tavola periodica e gli elementi a più elevata elettronegatività sono i non metalli, collocati nella parte destra della tavola periodica. Un legame ionico si forma quindi fra un metallo e un non metallo, come indicato dalla risposta **A**. ▶ Unità 2, Lezione 6
- 9** Il legame a idrogeno è un legame debole dovuto all'interazione elettrostatica fra una parziale carica positiva e una parziale carica negativa; si forma tra un atomo di idrogeno legato con legame covalente a un atomo molto elettronegativo (F, O o N) e il doppietto solitario di un atomo molto elettronegativo (F, O o N) di una molecola adiacente o della stessa molecola. La risposta corretta è la **C**. ▶ Unità 2, Lezione 7
- 10** La presenza di legami a idrogeno tra le molecole d'acqua conferisce a questa sostanza proprietà chimico-fisiche eccezionali: tra queste, l'alta temperatura di ebollizione e la bassa densità allo stato solido. La risposta corretta è dunque la **A**: nel ghiaccio, infatti, ogni molecola d'acqua è unita attraverso legami a idrogeno ad altre quattro molecole disposte in modo ben preciso a formare una struttura cristallina relativamente aperta e con ampi spazi vuoti. Quando il ghiaccio fonde, alcuni dei legami a idrogeno si rompono determinando il collasso del reticolo cristallino e l'impaccamento delle molecole in modo meno regolare ma più fitto. Nel solido le molecole sono dunque più lontane le une dalle altre che nel liquido, occupando un volume maggiore e conferendo al ghiaccio minor densità rispetto all'acqua. ▶ Unità 2, Lezione 7
- 11** Le molecole considerate sono molecole biatomiche, ognuna formata da due atomi uguali uniti da un legame covalente puro. Poiché la differenza di elettronegatività tra i due atomi è nulla, la nuvola elettronica è equamente condivisa, non vi è in media alcuna separazione parziale di carica elettrica e le molecole non possono essere dipoli permanenti (la risposta **A** è quindi sbagliata). ▶ Unità 2, Lezione 7
- 12** A causa dell'estrema mobilità degli elettroni di legame intorno ai due nuclei, può però accadere che la nuvola elettronica sia spostata per brevissimi istanti verso una delle due estremità della molecola formando un dipolo temporaneo. Nell'istante infinitesimo della sua esistenza, il dipolo temporaneo formatosi può esercitare la sua influenza su altre molecole vicine, inducendone la polarizzazione e determinando così la formazione di dipoli indotti. Proprio alla presenza di questi dipoli indotti sono dovute quelle forze attrattive debolissime che sono appunto le forze di van der Waals. La risposta esatta è dunque la **E**. ▶ Unità 2, Lezione 7
- 13** Le molecole possono interagire tra loro e rimanere unite grazie a diversi tipi di legami intermolecolari: escludiamo quindi le risposte **B**, **C** ed **E**, che riportano legami che si instaurano tra gli atomi, e non tra le molecole. La formazione del legame a idrogeno prevede la presenza nelle molecole di uno degli atomi F, O o N e, naturalmente, dell'atomo di H. La formula dell'ammoniaca è NH_3 , di conseguenza possiede le caratteristiche necessarie affinché tra le molecole si instauri un legame a idrogeno: infatti, l'atomo di H di una molecola di NH_3 si lega a un atomo di N di un'altra molecola di NH_3 . La risposta corretta è la **D**. ▶ Unità 2, Lezione 7

Vuoi metterti alla prova con 5 domande difficili sugli argomenti di questa Unità?
Inquadra il QRcode a fianco.

Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



Per costruire la formula di un composto formato da alluminio (Al) e cloro (Cl) si scrivono innanzitutto gli elementi coinvolti, in questo caso ioni, perché fra un metallo del gruppo III A e un non metallo molto elettronegativo come il cloro si forma un legame ionico:



Ora, per costruire una formula elettricamente neutra si pone al piede di ciascuno ione il numero di cariche (o numero di ossidazione) dell'altro:



La formula di questo composto è AlCl_3 .



Tipi di nomenclatura

Talvolta due elementi possono legarsi in quantità diverse a dare composti diversi: per esempio, il carbonio e l'ossigeno possono portare alla formazione di CO o CO_2 , a seconda che il N.O. del carbonio sia +2 (in CO) o +4 (in CO_2). In questi casi è necessario distinguere i due composti utilizzando una nomenclatura inequivocabile.

Esistono tre modi per dare il nome a un composto inorganico:

- la nomenclatura **IUPAC** (*International Union of Pure and Applied Chemistry*) prevede l'utilizzo dei prefissi numerali greci (*mono-, di-, tri-* ecc.) per indicare i rapporti numerici fra gli atomi. Risulta inequivocabile, non necessita quindi di differenziare i diversi N.O.;
- la **notazione di Stock**, in base alla quale si indica il N.O. del metallo fra parentesi, utilizzando i *numeri romani*; per esempio lo ione Cu^+ è indicato come rame(I) (si legge rame-uno).
- la nomenclatura **tradizionale** secondo la quale si aggiungono i prefissi e/o i suffissi seguenti:
 - *ipo-...-oso*, quando il metallo presenta N.O. minore;
 - *-oso*, quando presenta il secondo N.O. in ordine crescente;
 - *-ico*, quando presenta il terzo N.O. in ordine crescente;
 - *per-...-ico*, quando presenta il N.O. maggiore.

Se il metallo possiede solo due N.O., si usano solo i suffissi *-oso*, per il N.O. minore, e *-ico* per il N.O. maggiore.

La tabella seguente riporta i nomi di alcuni ioni con diverso numero di ossidazione e la rispettiva nomenclatura.

| Elemento | Ione | Nomenclatura tradizionale | Notazione di Stock |
|-----------|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| Rame | Cu^+ Cu^{2+} | rameoso rameico | rame(I) rame(II) |
| Ferro | Fe^{2+} Fe^{3+} | ferroso ferrico | ferro(II) ferro(III) |
| Piombo | Pb^{2+} Pb^{4+} | piomboso piombico | piombo(II) piombo(IV) |
| Manganese | Mn^{2+} Mn^{3+} | manganoso manganico | manganese(II) manganese(III) |



Videorisoluzione
Nomenclatura

Quesiti commentati

Vuoi metterti alla prova con 5 quesiti facili? Inquadra il QRcode a fianco. Per ogni quesito troverai anche l'indicazione della risposta corretta.



1 Quale dei seguenti composti contiene un elemento con numero di ossidazione -3 ?

- A AlCl_3
- B KHSO_4
- C $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$
- D PH_3
- E CrO_3

2 Qual è il numero di ossidazione del cromo nello ione $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$?

- A -2
- B $+2$
- C $+3$
- D $+6$
- E $+7$

3 Negli ossiacidi a quale elemento è legato l'idrogeno acido?

- A All'ossigeno
- B Al carbonio
- C Al non-metallo
- D Ad un altro atomo di idrogeno
- E All'azoto

4 Qual è la formula del bicarbonato di ammonio, usato per la lievitazione dei dolci?

- A NH_4HCO_3
- B NH_4CO_3
- C $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$
- D NH_3HCO_3
- E NH_3CO_3

5 Un metallo alcalino, in presenza di ossigeno:

- A forma l'ossido corrispondente
- B forma l'idrossido corrispondente
- C resta inalterato essendo scarsamente reattivo
- D reagisce in rapporto stechiometrico 1:1
- E forma l'anidride corrispondente

6 Se M rappresenta un metallo alcalino-terroso, quale fra le seguenti è la formula corretta per il suo composto con il cloro?

- A M_2Cl_3
- B MCl_2
- C MCl^-
- D M_2Cl
- E MCl

7 Quale/i delle seguenti affermazione/i relative ai non metalli è/sono corretta/e?

- 1. Formano ossidi basici
- 2. Formano ossidi acidi
- 3. Hanno bassa elettronegatività

- A Solo la 1
- B Solo la 2
- C Solo la 3
- D Solo la 1 e la 3
- E Solo la 2 e la 3

8 Quale dei seguenti schemi di reazione NON è corretto?

- A Alogeno + idrogeno \rightarrow idruro
- B Metallo + ossigeno \rightarrow ossido basico
- C Metallo + non-metallo \rightarrow sale binario
- D Non-metallo + ossigeno \rightarrow ossido acido
- E Ossido basico + acqua \rightarrow idrossido

9 Il cloruro ferrico è:

- A FeClO
- B FeCl_2
- C FeCl_3
- D FeCl_4
- E FeCl

10 Qual è la formula dell'acido iodidrico?

- A HI
- B HI_2
- C HIO_2
- D HIO_3
- E H_2I

11 Il composto NaH_2PO_4 :

- A è un sale
- B non può esistere
- C è un idrossido
- D non è un sale perché è un composto quaternario
- E non è un sale perché possiede ancora proprietà acide

12 Indicare quale delle seguenti formule è errata.

- A HClO_4
- B NH_4SO_4
- C $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$
- D KHSO_4
- E KH_2PO_4

Per confrontare fra loro le tre frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ le si riduce allo stesso denominatore, ottenendo:

$$\frac{18}{24}, \frac{20}{24} \text{ e } \frac{21}{24}$$

Essendo $18 < 20 < 21$, si ottiene: $\frac{18}{24} < \frac{20}{24} < \frac{21}{24}$ $\frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8}$

Se le frazioni da confrontare sono soltanto due (per esempio a/b e c/d) esiste un metodo più rapido: si confrontano i due prodotti $a \cdot d$ e $b \cdot c$ e si utilizza la regola seguente.

La frazione più grande è quella il cui numeratore compare nel prodotto maggiore.

Per confrontare fra loro le due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$, si calcolano i due prodotti $4 \cdot 4 = 16$ e $5 \cdot 3 = 15$. Essendo $16 > 15$, il numeratore che compare nel prodotto maggiore è 4, per cui la frazione maggiore è $\frac{4}{5}$, ossia $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$.



Videorisoluzione

Frazioni e informazioni

Quale tra le seguenti frazioni è la maggiore?

- A** 5/6
- B** 3/4
- C** 9/8
- D** 5/4
- E** 6/6

Per poter confrontare tra loro più frazioni è sufficiente fare in modo che abbiano lo stesso denominatore (si calcola quindi il loro minimo comune multiplo) e confrontare i numeratori. Nell'esempio considerato le cinque frazioni sono rispettivamente uguali a:

$$\frac{20}{24}; \frac{18}{24}; \frac{27}{24}; \frac{30}{24}; \frac{24}{24}$$

La frazione maggiore è quella che possiede il numeratore maggiore, dunque quella indicata nella risposta **D**.

Nel caso in cui le frazioni da confrontare siano solo due ($a/b, c/d$), è possibile procedere in un altro modo: si confrontano i prodotti $a \cdot d$ e $b \cdot c$: la frazione più grande è quella il cui numeratore ha determinato il prodotto maggiore. Per esempio, per stabilire quale frazione è maggiore tra $5/13$ e $2/5$, è possibile applicare il criterio appena esposto:

$$5 \cdot 5 = 25; 2 \cdot 13 = 26 \text{ quindi } 2/5 \text{ è maggiore di } 5/13.$$



Trovare i $2/9$ di 54.

- A** 14
- B** 68
- C** 12
- D** 24
- E** 18

Per risolvere l'esercizio occorre semplicemente moltiplicare 54 per $2/9$. Si ottiene:

$$\frac{2}{9} \text{ di } 54 = \frac{2}{9} \cdot 54 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (risposta } \mathbf{C}).$$



Claudia e Mauro vanno a fare compere. Nel primo negozio Mauro spende 12 euro che sono $1/4$ di quanto spende Claudia. Nel secondo negozio Claudia spende il triplo di Mauro che ha speso la metà della somma spesa da Claudia nel primo negozio. Quanto spendono in totale?

- A** 196 euro
- B** 96 euro
- C** 180 euro
- D** 120 euro
- E** 156 euro

Nel primo negozio: M 12 euro e C 48; nel secondo: M 24 e C 72; in tutto 156 euro (risposta **E**).



Videorisoluzione

Frazioni e probabilità